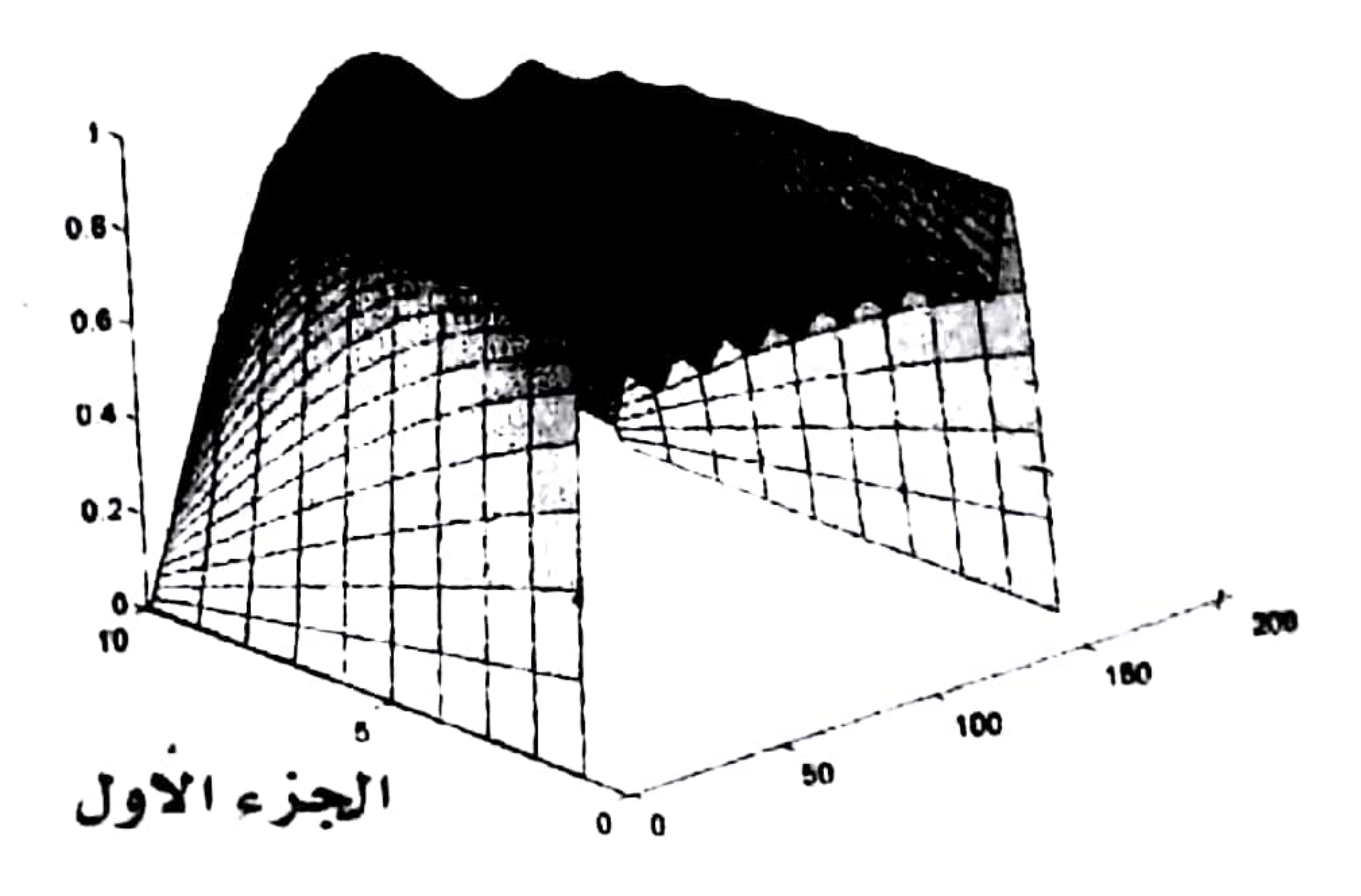
تومي صالح

مدخل
لنظرية القياس الإقتصادي

دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين



الجزء الأول

ديوان المطبوعات الجامعية

د. تومي صالح
أستاذ التعليم العالي
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
جامعة الجزائر

مدخل

لنظرية القياس الإقتصادي

دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين

الجـــزء الأول

الطبعـــة الثانية



رقم النشر 4.01.4364
رقم ت.د.م.ك (ISBN) 978.9961.0.0350.3
رقم الإيداع القانوني 1998-1050

إلى

والدتي

زوجتي

أبنائي

وبناتي

Scanned by CamScanner

مدخل لنظرية القياس الإقتصادي

الجزء الأول:

الفصل الأول: التعريف والهدف من دراسة القياس الإقتصادي مع بعض المبادئ الإحصائية.

الفصل الثاني: تحليل نموذج الإنحدار الخطي البسيط.

الفصل الثالث: تحليل الإنحدار المتعدد.

الفصل الرابع: ميادين تطبيق الإنحدار المتعدد.

الفصل الخامس: نظرية العينات الكبيرة.

الجزء الثاني:

الفصل السادس: طريقة المربعات الصغرى المعممة، ومشاكل تطبيق الإنحدار المتعدد.

الفصل السابع: المتغيرات المؤخرة ونماذج توزيع التأخير.

الفصل الثامن: نماذج السلاسل الزمنية.

الفصل التاسع: مدخل لنظام معادلات خطية.

الملحق.

الجـزء الأول

مقدمة المؤلف

"إن القياس الإقتصادي هو فن و علم إستعمال الطرق الإحصائية لغرض قياس العلاقات الإقتصادية. حيث تستعمل طرق القياس الإقتصادي لتقدير معالم النموذج، إختبار الفرضيات الموضوعة حول النموذج، و تصميم التنبؤات من هذا الأخير. فبناء نموذج القياس الإقتصادي يعتبر فنا، تماما، مثلما نستعمل معلومات الهندسة المعمارية لتهيئة البنايات" GREGORY . C . CHOW 1983 .

أخي الطالب:

إن الغرض من إصدار هذا المرجع هو إعطاء بعض التقنيات المستعملة في تقدير وبناء نماذج القياس الإقتصادي البسيطة و الخطية. مع العلم أن هناك جزءا ثانيا مكملا لهذا الكتاب ، حيث يعتبر هذا الأخير، من خلال طبعته الأولى، تنسيقا للمحاضرات التي ألقيتها منذ سنة 1987 إلى يومنا هذا، على طلبة السنة الثالثة لبعض التخصصات (القياس الإقتصادي، التحليل الإقتصادي، والتخطيط والتنمية الإقتصادية) بمعهد العلوم الإقتصادية لجامعة الجزائر. وقد راعيت أن تشمل مادة هذا الكتاب الموضوعات المناسبة لطلبة المعاهد الوطنية العليا المتخصصة في الإحصاء والإقتصاد التطبيقي . أملي، بعد إستعمال هذا الكتاب في شكله الحالي، أن تصلني إقتراحات وإنتقادات القراء البناءة لغرض تحسينه في طبعته القادمة.

في الأخير أجد نفسي مدينا للأستاذة زكية بلعقبي على مساعدتي في تنقيح النسخة الأولى لهذا العمل، والأستاذ علي رعاد على إثرائه لهذه النسخة من الناحية العلمية واللغوية إثر تكليفه من طرف المجلس العلمي لمعهد العلوم الإقتصادية بهذا الغرض. كما لا أنسى شكري للآنسة حورية داهوز عما قدمته من جهد في طباعة هذه المادة وللأستاذ محمد عبدالمؤمن .(رئيس مركز الإعلام الآلي)، على مساعدتي في وضع اللمسات الأخيرة والإخراج النهائي لهذه النسخة . ولا بد من التذكير بأن كل النقائص الممكن ظهورها يتحملها المؤلف .

صالح تومي

معهد العلوم الإقتصادية -جامعة الجزائر-

جانفي 1997.

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الفصل الأول التعريف والهدف من دراسة القياس الإقتصادي مع بعض المبادئ الإحصائية.

1-1 تعريف القياس الإقتصادي

يعتبر القياس الإقتصادي فرعا من فروع علم الإقتصاد. حيث يهتم بالقياس والتقدير الميداني للعلاقات الإقتصادية.

يعتبر هذا التعريف شاملا. حيث أن كل العلاقات الإقتصادية تهتم بالقياس إذ أننا نقيس. عادة. الإنتاج الوطني الخام. حجم البطالة. التوظيف. عرض النقود والطلب عليها. الصادرات و الواردات. مؤشرات الأسعار و غيرها ويعرف الباحث(1) Maddala القياس الإقتصادي على أنه: تطبيق طرق الاحصاء والرياضيات في تحليل المعطيات الاقتصادية. لهدف التأكد الميداني من النظريات الإقتصادية و من ثم قبولها أو رفضها.

و منه فإن القياس الإقتصادي يختلف عن الرياضيات الإقتصادية التي تعني تطبيق الرياضيات على تلك العلاقات الإقتصادية دون التأكد من صحة تلك العلاقات ميدانيا. و يعتبر القياس الإقتصادي أداة توفيقية ما بين النظرية الإقتصادية. الرياضيات الإقتصادية و الإحصاء. لكنه يختلف تماما عن كل هذه الفروع. و يعتمد باحثو القياس الإقتصادي على مبادئ النظرية الإقتصادية عند بنائهم لنموذج القياس الإقتصادي Econometric Model. مستعملين النظرية الإحصائية و تقنيات القياس الإقتصادي. و من ثم يختبرون. ميدانيا. بعض العلاقات الموجودة فيما بين المتغيرات الإقتصادية. و يمكن تطبيق القياس الإقتصادي على عدة ميادين مثل العلوم الإجتماعية و الإنسانية. الصحة. النقل و غيرها.

1- G S MADDALA "Introduction to Econometrics" Mac Millan publishing Company Chap 1 U S A 1988

إن أول ظهور للقياس الإقتصادي جاء مع إنشاء جمعية القياس الإقتصادي Econometric Society المكونة سنة 1930. و من ثم إصدار المجلة الدورية Econometrica سنة 1933. تبعتها، بعد ذلك، عدة دوريات أخرى متخصصة في هذا الميدان مثل مجلة القياس الإقتصادي Journal of Econometrics و غيرها.

لبناء أي نموذج قياس إقتصادي، نبدأ عادة بنظرية العلاقات الإقتصادية حتى نقيس و نحدد الصياغة الرياضية للنموذج (بناء النموذج). و منه نستعمل طرقا مناسبة (طرق التقدير في القياس الإقتصادي) للحصول على مقدرات عددية لمعالم العلاقات الإقتصادية (المرونات، المضاعفات، الأميال، التكاليف الحدية، المعاملات التقنية و غيرها).

إن أهم ميزة في نموذج القياس الإقتصادي للعلاقات الإقتصادية هو أنه يحتوي على الحد العشوائي (عنصر الخطأ) الذي يخضع لقوانين الإحتمال، و الذي نجده مهملا لدى النظرية الإقتصادية و الرياضيات الإقتصادية. إذ يعطي هذا المتغير العشوائي (الحد العشوائي أو عنصر الخطأ) العلاقات الصحيحة و الدقيقة للظواهر والعلاقات الإقتصادية فيما بينها.

1-2 النموذج الإقتصادي ونموذج القياس الإقتصادي

إن أول مشكلة تواجه باحث القياس الإقتصادي هي تشكيل نموذج القياس الإقتصادي. و منه نعرف النموذج على أنه تمثيل مبسط لعدة علاقات إقتصادية معقدة. فمثلا لما نقول أن الكمية المطلوبة من الحمضيات هي دالة لسعر هذه الأخيرة، فإننا نقوم بتمثيل هذه العلاقة بأبسط ما يمكن. حيث، ميدانيا، توجد عدة متغيرات إقتصادية وغير إقتصادية أخرى تتحكم في الطلب على الحمضيات مثل دخل المستهلكين، أسعار السلع البديلة، أذواق المستهلكين، عادات وتقاليد المجتمع المعني بالدراسة وغيرها.

هناك علماء إقتصاد كثيرون يشجعون هذا التبسيط. لأن النماذج البسيطة سهلة الفهم، وبتوفر البيانات (المعطيات) يمكن إختبارها. ويتزعم هذا الفريق من الباحثين الإقتصاديين كلا من Karl Propper 1959. و الإقتصادي المشهور Milton Friedman 1953. و مع هذا التبسيط لشرح العلاقات الإقتصادية المعقدة، نلاحظ أن النموذج مبسط أكثر من اللزوم أولا. و الفرضيات الموضوعة حول النموذج ليست دائما محققة ثانيا.

ولتحاشي العيب الأول، يرى الباحث Koopmans 1957 أنه يمكننا الإنطلاق من النموذج المبسط، ثم ننتقل تدريجيا إلى نماذج معقدة أكثر. من جهة أخرى، يرى باحثون آخرون أننا ننطلق من نموذج عام يحتوى كل المتغيرات الإقتصادية الممكنة. ثم نبسطه تبعا للمعطيات المتوفرة لدينا. أما بالنسبة للعيب الثاني، فإن الإقتصادي M. Friedman يرى بأن فرضيات أية نظرية لايمكن أن تكون دائما محققة. و يؤيده في ذلك باحثو القياس الإقتصادي المشهورين أمثال J.D. Sargan، و الأستاذ D.F. Hendry.

عمليا، ندخل كل المتغيرات الإقتصادية التي نظن أن لها علاقة سببية قوية في بناء النموذج. أما بقية المتغيرات التي لا نعرفها (أو لا تتوفر لدينا عنها بيانات إحصائية) فنضعها في متغير واحد ونسميه بمتغير الخطأ العشوائي (عنصر الخطأ). وهذا التصرف يؤدي بنا إلى التفريق ما بين النموذج الإقتصادي ونموذج القياس الإقتصادي. فالنموذج الإقتصادي هو عبارة عن مجموعة من الفرضيات التي تشرح (بالتقريب) تصرف إقتصاد بلد ما، أو قطاع إقتصادي معين.

أما نموذج القياس الإقتصادي فيحتوي على مايلي:

1) مجموعة معادلات سلوكية (تصرفية) أو تقنية، مشتقة من النموذج الإقتصادي. تحتوي هذه المعادلات على بعض المتغيرات المشاهدة والبعض الآخر غير مشاهدة نكتبه في شكل متغير عشوائي هو "عنصر الخطأ"

2) تقرير مفصل حول ما إذا كانت هناك أخطاء في قياس ملاحظات المتغيرات المشاهدة.

3) تخصيص توزيع إحتمالي لهذه الأخطاء العشوائية (و أخطاء القياس)

فإذا أخذنا النموذج المبسط للطلب على الحمضيات مثلا. فإن نموذج القياس الإقتصادي يحتوي، عادة، على ما يلي:

a) المعادلة السلوكية (التصرفية) وهي: $q = \alpha + \beta P + u$

حيث أن: q هي الكمية المطلوبة من الحمضيات، P هي سعر الحمضيات و α , β هما معلمتان غير معروفتين.

و تمثل، هنا، q، P المتغيرين المشاهدين. أما u فهو المتغير العشوائي غير المشاهد.

b) تخصيص التوزيع الإحتمالي لعنصر الخطأ u والذي نفترض أنه يحقق الشرط $E(u / P) = 0$. كما أن قيم u مستقلة من أجل كل الملاحظات المختلفة و الموزعة طبيعيا كما يلي $u \sim IN(0, \sigma_u^2)$

إذن بمساعدة هذه التخصيصات، يمكننا إختبار، ميدانيا، قانون الطلب أو الفرضية المنبثقة من النظرية الإقتصادية والتي تقول يجب أن يكون $\beta < 0$. كما يمكننا إستعمال القيم المقدرة للمعلمتين α , β (مستعملين طرق التقدير التي سيأتي ذكرها فيما بعد) لدالة الطلب المقدرة من أجل التنبؤ بالكميات المطلوبة مستقبلا، أو من أجل أهداف إقتصادية وسياسية أخرى.

1-3 أهداف ومناهج البحث في القياس الإقتصادي

1-3-1 أهداف القياس الإقتصادي

هناك ثلاثة أهداف رئيسية لموضوع القياس الإقتصادي. حيث يهدف هذا الأخير إلى:

1) بناء النماذج القياسية الإقتصادية. أي بناء النماذج الإقتصادية في شكل قابل للإختبار الميداني. وهناك عدة طرق لبناء نموذج القياس الإقتصادي من النموذج الإقتصادي عن طريق إختيار الشكل الدالي، تخصيص الهيكل العشوائي للمتغيرات، وهكذا. وتمثل هذه المرحلة مشكلة تصور الصياغة الرياضية في منهجية القياس الإقتصادي.

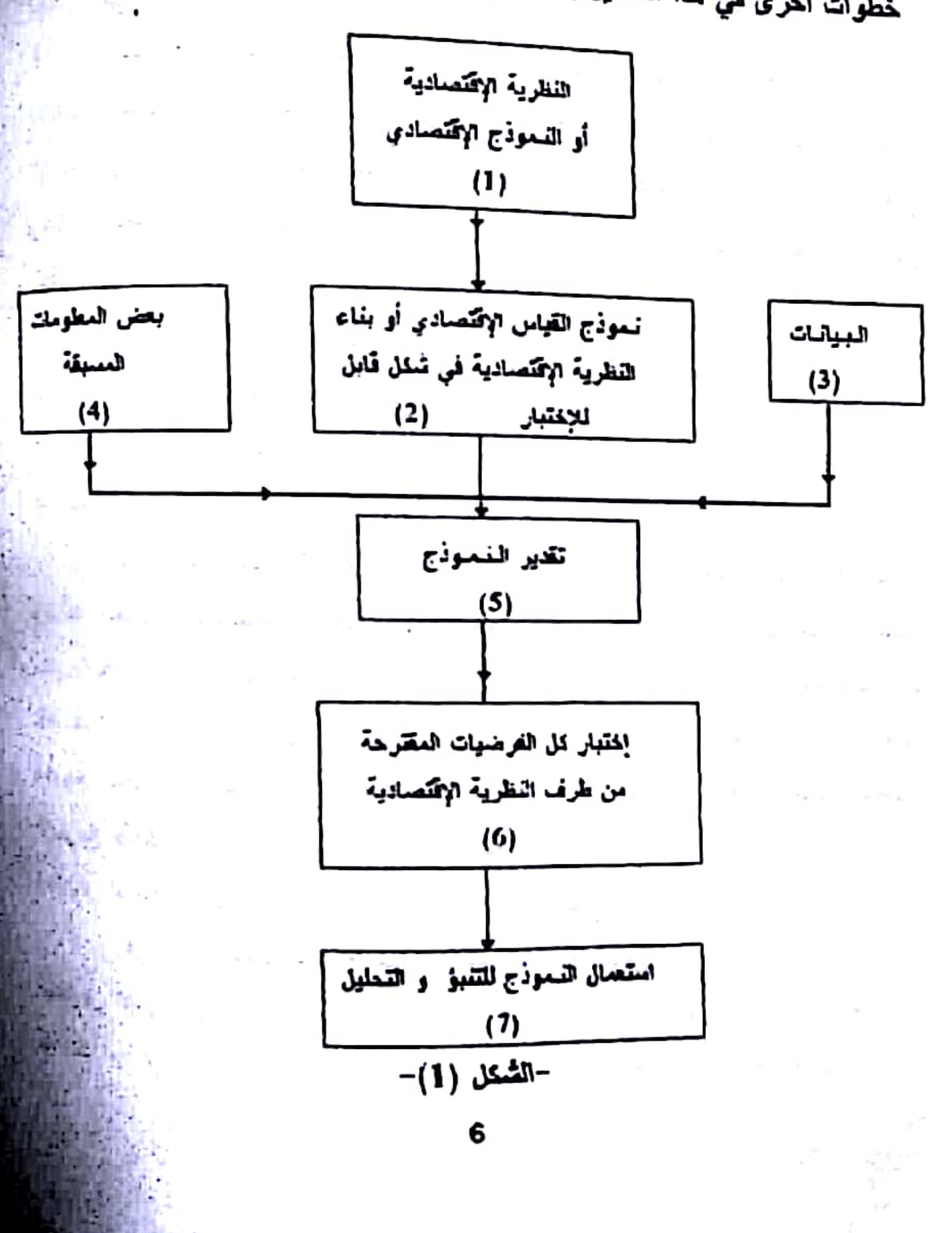
2) تقدير و إختبار هذه النماذج مستعملين البيانات المتوفرة. و تمثل هذه العملية المرحلة الإحصائية للقياس الإقتصادي.

3) إستعمال النماذج المقدرة لغرض التنبؤ، التحليل الإقتصادي، أو إتخاذ القرارات المناسبة.

لقد أهتم باحثو القياس الإقتصادي في فترة الستينات بالمبادئ الإحصائية. وكانت مجالات التخصيص محدودة جدا. حيث كانت أغلب إهتمامات الباحثين منصبة على التقدير الإحصائي لنماذج القياس الإقتصادي المخصصة بطريقة صحيحة. إذ خصصت هذه الفترة لطرق التقدير البديلة و برامج الكمبيوتر المختلفة. و لم تعطى أهمية لأخطاء التخصيص أو أخطاء في قياس المشاهدات. لكن مع التقدم و التطور السريع لأجهزة و برامج الكمبيوتر المختلفة. أصبحت هذه المشاكل ثانوية، و تغير إهتمام الباحثين إلى مجالات التحليل. و يمكن توضيح ذلك في الشكل (1).

في بداية السبعينات و جهت عدة إنتقادات إلى صياغة الشكل (1). لأنه يحتوى على طريق واحد للوصول إلى الهدف المنشود. و من هذه الإنتقادات. نلاحظ أنه في الشكل (1) لا يوجد التفاعل المتبادل Feed back ما بين الإختبار

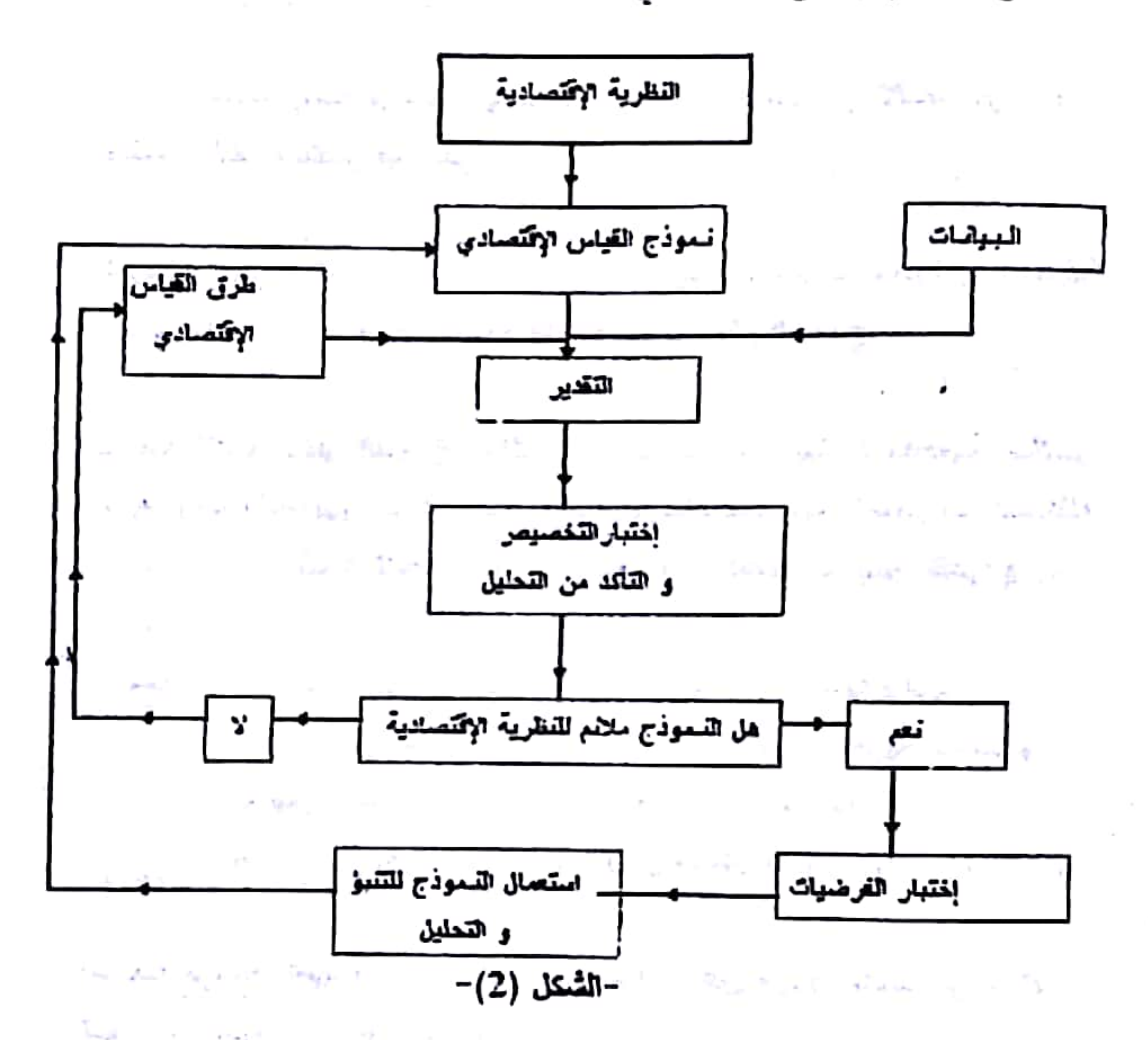
القياسي للنظريات الإقتصادية و الصياغة الرياضية لهذه النظريات. حيث لا يكتفي باحثو القياس الإقتصادي بالبيانات المسلمة لهم من طرف جهات أخرى. بل يجب أن يكون هناك تفاعل متبادل من الخطوتين (4) و (5) إلى الخطوة (3). و إذا نظرنا إلى الخطوة (6)، نلاحظ بأن إختبار الفرضيات يشير فقط إلى تلك المقترحة من طرف النموذج الإقتصادي الأصلي في الخطوة (2). ولهذا نرى ضرورة وجود خطوات أخرى في هذا التحليل بالشكل (1) .



-الشكل (1)-

وبعد هذه الإنتقادات الموجهة من طرف باحثي القياس الإقتصادي الحديث.

صحح الشكل (1) على النحو التالي:



-الشكل (2)-

هناك أربعة مراحل رئيسية في أية دراسة للقياس الإقتصادي، وهي موضحة بشكل مختصر فيما يلي:

المرحلة الأولى: تخصيص النموذج: وتشمل إيجاد متغيرات النموذج، الصياغة الرياضية للنموذج، المعرفة المسبقة لإشارة وحجم معالم النموذج.

المرحلة الثانية: تقدير النموذج: وتشمل تجميع البيانات (بيانات مقطعية، سلاسل زمنية، وغيرها). تمييز الدالة. إختبار درجة الإرتباط فيما بين المتغيرات المستقلة لتحديد درجة أو مشكلة التعدد الخطي. وإختيار تقنية التقدير المناسبة للنموذج.

المرحلة الثالثة: تقييم النموذج: وتعتمد على ثلاثة مقاييس أساسية وهي:

a) المقاييس الإقتصادية المعروفة مسبقا أو مقاييس النظرية الإقتصادية.

b) مقاييس النظرية الإحصائية أو الإختبارات الإحصائية.

c) مقاييس نظرية القياس الإقتصادي أو مشاكل القياس الإقتصادي.

المرحلة الرابعة: تقييم قوة التنبؤ للنموذج المقدر عن طريق التأكد من إستقرار المقدرات. إختبارات التنبؤ والمحاكاة.

4-1 بعض المبادئ الإحصائية

1-4-1 خصائص التوقع الرياضي:

a) ليكن X متغير عشوائي، a، b ثابتان. إن:

$$E(ax+b)=aE(x)+b$$

b) .... $E\left[(ax)^2\right]=a^2E(x^2)$

ويلاحظ أن: .... $E(x^2)\neq\left[E(x)\right]^2$

c) .... $Var(ax+b)=a^2Var(x)$

$$Var(x)=E\left[x-E(x)\right]^2$$

d) إذا كانت X و y متغيريتين عشوائيتين فإن:

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

$$Var(x+y)=Var(x)+Var(y)+2Cov(x,y)$$

$$Var(x-y)=Var(x)+Var(y)-2Cov(x,y)$$

e) لتكن X مستقلة عن y فإن: $E(xy)=E(x)\bullet E(y)$

وكذلك:

$$Cov(x,y)=0$$

$$Var(x\pm y)=Var(x)+Var(y)$$

f)

$$Var(\bar{x})=Var\left[\frac{1}{n}\sum x_i\right]=\frac{1}{n^2}Var(\sum x_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_i \left[Var(x_i) \right] = \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma^2 = \frac{n}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

حيث يعرف σ^2 على أنه تباين X_i، و X_j مستقلة عن بعضها البعض.

$$E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right] = \sigma^2$$ ....(8

لأن:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i \left[(x_i - m) - (\bar{x} - m) \right]^2$$ ....

$$= \sum_i \left[(x_i - m)^2 + (\bar{x} - m)^2 - 2(x_i - m)(\bar{x} - m) \right]$$

$$= \sum_i (x_i - m)^2 + \sum_i (\bar{x} - m)^2 - 2(\bar{x} - m) \sum_i (x_i - m)$$

$$= \sum_i (x_j - m)^2 + n(\bar{x} - m)^2 - 2(\bar{x} - m) \, . n(\bar{x} - m)$$

$$- \sum_i (x_i - m)^2 - n(\bar{x} - m)^2$$

حيث أن m هو وسط X_i ومنه فإن:

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2-\frac{n}{n-1}(\bar{x}-m)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\right]-\left[\frac{n}{n-1}E(\bar{x}-m)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i}E\left[(x_i-m)^2\right]-\frac{n}{n-1}\bullet\frac{\sigma^2}{n}$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2)-\frac{n}{n-1}\bullet(\frac{\sigma^2}{n})=\sigma^2$$

2.4.1 - المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية:

- نقول عن المتغير X بأنه متغير عشوائي، إذا كان من أجل كل عدد حقيقي a، يوجد إحتمال أن تأخذ X قيمة أقل أو تساوي a أي $pr(X\leq a)$. وسوف نأخذ القيم x, y, z للتعبير عن القيم الخاصة بالمتغير العشوائي. إن $pr(X=x)$ هي إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة x. أما $pr(x_1\leq X\leq x_2)$ فهي إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيما موجودة مابين x_1 و x_2.

- إن القانون الذي يعطي الإحتمالات الخاصة بمختلف القيم التي يأخذها المتغير العشوائي المستمر X يسمى بالتوزيع الإحتمالي ومنه يمكن تعريفه كمايلي:

$$pr(x_1\leq X\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x).dx ......(1.1)$$

a) التوزيع الطبيعي: ليكن X متغير عشوائي حقيقي ومستمر. نقول أن X يتبع القانون الطبيعي إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية تكتب على الشكل:

$$pr(X_i = x) = f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_x^2} (x - m_x)^2 \right]$$

$$-\infty < X < +\infty$$

ويمكن توضيح قانون التوزيع الطبيعي عن طريق وسطه وتباينه. حيث إذا كانت X موزعة طبيعيا. نكتب:

$$X \sim N(m_x, \sigma_x^2) \dots\dots\dots (1.2)$$

ونقول أن X موزعة طبيعيا بوسط هو m_x، وتباين هو σ_x^2. ونفترض التوزيع الطبيعي للأسباب التالية:

a) إن التوزيع الطبيعي متناظر. وهو السبب الذي يساعدنا على معرفة توزيع المعالم التي نريد تقديرها.

b) إن التوزيع الطبيعي مبين تماما بواسطة وسطه وتباينه. ومنه لاتواجه أية صعوبة في إيجاد خصائص العزم الثالث والرابع. وكذا عزوم التوزيعات الاحتمالية من درجة أعلى.

إن النتائج السابقة الذكر والتي تصلح على المتغيرات الطبيعية، تساعدنا على تطوير عدة إختبارات إحصائية مستعملة في القياس الإقتصادي.

b) التوزيع χ^2:

يستعمل التوزيع χ^2 لإختبار الفرضيات التي تتعامل مع تباينات المتغيرات العشوائية. حيث إذا كانت $(X_1, X_2, \dots\dots, X_n)$ سلسلة متغيرات طبيعية مستقلة. بوسط معدوم $E(X_i) = 0$. وبتباين الوحدة أي $Var(X_i) = 1$

أي : $$X_i \sim IN(0,1) : i=1,2,.....n$$

ومنه فإن: $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ لها توزيع χ^2 بدرجات حرية هي n. ونكتبها على الشكل:

$$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2 ......(1.3)$$

- ومنه نقول بأن التوزيع χ^2 هو توزيع مجموع مربعات n متغير طبيعي معياري ومستقل. أي إذا كانت $X_i \sim IN(0,\sigma_i^2)$ فإن:

$$Z=\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_n^2 ......(1.4)$$

- كما يمكن الإشارة إلى أنه إذا كانت $Z_1 \sim \chi_n^2$ وكذلك $Z_2 \sim \chi_m^2$ مع Z_1 مستقلة عن Z_2. فإن:

$$Z_1+Z_2 \sim \chi_{n+m}^2 ....(1.5)$$

c) توزيع Student

نفترض إحصائيا في بعض الأحيان بأن تباين المتغير العشوائي يكون معروفا. لكن عمليا هذا غير صحيح (مثلما سنرى فيما بعد عند تحليلنا الإحصائي لمقدرات المعالم). ومنه نصطدم بمشكلة كيفية إختبار الفرضيات لما يكون هذا التباين غير معروف. ولحلها نعرف التوزيع t :

- إذا كانت $X \sim N(0,1)$. وكذلك $Z \sim \chi_n^2$ مع X مستقلة عن Z فإن:

$$Q = \frac{X}{\sqrt{Z/n}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2/n}} \sim t_n \ldots\ldots\ldots (1.6)$$

المعياري X.

- ومنه نلاحظ أن التوزيع t هو عبارة عن توزيع المتغير الطبيعي الطبيعي المعياري X. مقسما على الجذر التربيعي لمعدل المتغير المستقل χ^2 (أي χ^2 مقسوما على درجات حريته n). حيث أن التوزيع t هو توزيع إحتمالي متناظر مثل التوزيع الطبيعي. لكنه محدب أكثر. وطرفيه أطول من التوزيع الطبيعي. وكلما إقتربت درجات الحرية n من مالانهاية. يقترب التوزيع t من التوزيع الطبيعي. كما أن التوزيع t يصلح للعينات التي تتكون من أو تقل عن 30 مشاهدة. ويطبق هذا التوزيع في إختبار الفرضيات للمعالم الفردية. وسوف يتوضح ذلك عند تطرقنا لإختبار الفرضيات لمعنوية المعالم بالفصل الثاني لاحقا.

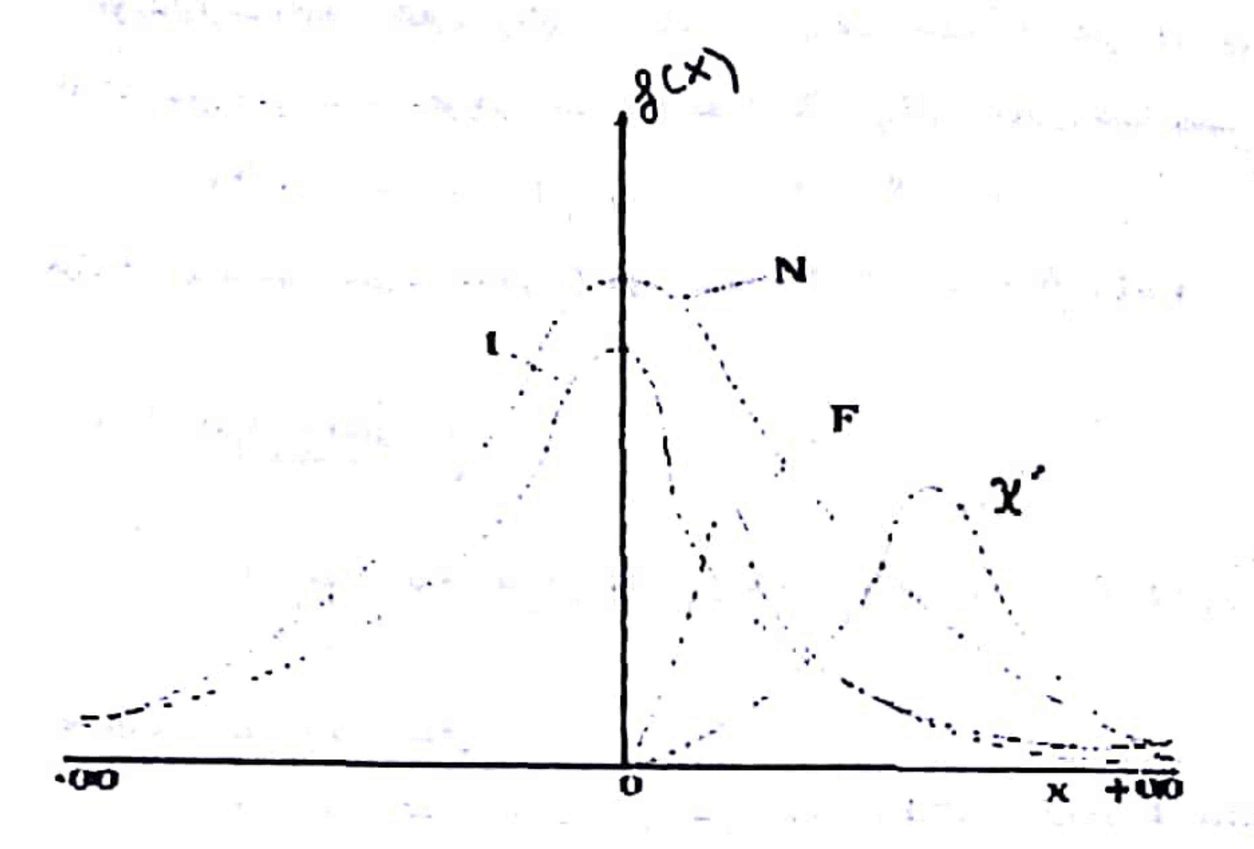
d) توزيع F Fisher:

نستخدم هذا التوزيع لما نريد إختبار الفرضيات المجمعة. المحتوية على أكثر من معلمة إنحدار. وعموما. يستعمل هذا التوزيع عند القيام بإختبارات محتوية على مساواة بين تباينين على الأقل. ويعرف هذا الأخير كما يلي:

- ليكن $Z \sim \chi^2_n$. وكذلك $X \sim \chi^2_m$. وإذا كانت χ^2_n مستقلة عن χ^2_m فإنه يمكن صياغة عبارة للتوزيع F كما يلي:

$$Q = \frac{X/n}{Z/m} = \frac{X}{Z} \bullet \frac{m}{n} \sim F_{n,m} \ldots\ldots\ldots (1.7)$$

- ويمكن توضيح مختلف التوزيعات المتحدث عنها سابقا في الشكل (3) أدناه.



-الشكل (3)-

3-4-1 تعريف المقدر

إن المقدر هو تلك القيمة التقديرية التي تأخذها معلمة مجتمع ما ولتكن θ. والمسحوبة من عينة عشوائية n تمثل ذلك المجتمع. ولنعتبر متغيرا عشوائيا X. بحيث يكون توزيعه مرتبطا بالمعلمة θ المطلوب تقديرها. فلتقدير معلمة المجتمع نوفق المعلومة المسبقة Information Prior التي يمكن أن ترافق المعلومات المعطاة من العينة. إن المعلومة المسبقة تهتم بالمتغير X. حيث يمكن أن تشمل على فرضيات حول الأشكال التي تأخذها التوزيعات. أو عن قيمة بعض المعالم غير θ. أو بعض التخصيصات المتعلقة بـ θ نفسها.

إن المعلومات المأخوذة من العينة معطاة بواسطة الملاحظات $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$. وطريقة إستعمال هذه المعلومة للحصول على مقدر

θ هو مايعرف بقانون التقدير والمسمى بالمقدار. إن مقدار المعلمة θ هو $\hat{\theta}$. وما دام $\hat{\theta}$ مبني على أساس تعويض عينة الملاحظات X في قانون معين، فإننا نكتب:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n) \ldots\ldots\ldots\ldots(1.8)$$

حيث أن أبسط ميزة لتوزيع المقدار $\hat{\theta}$ هو وسطه $E(\hat{\theta})$، وتباينه $Var(\hat{\theta})$.

1-4-4 طرق التقدير

إن أهم الطرق المعروفة في التقدير والقياس الإقتصادي هي ثلاثة وهي:

1- طريقة المربعات الصغرى

استعملت هذه الطريقة لأول مرة من طرف Legendre (1805) وكذلك Gauss (1809) في قياسات علم الفلك. والمشكل المطروح في ذلك الوقت هو تقريب مجموعة الملاحظات y_i مع بعض الدوال غير المعروفة $g_i(\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots \theta_m)$ التي تعتمد على المعلمات غير المعروفة أيضا $\theta = (\theta_1, \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_m)'$. حيث أن $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ ، $m < n$. ويعلق Legendre بأنه في حالة ما إذا كانت $g_i(\theta) = \theta_1$ نقوم بتدنئة المقدار $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta_1)^2$ بالنسبة لـ θ_1. لنحصل على وسط العينة:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}_n \ldots\ldots\ldots(1.9)$$

والذي يعتبر أحسن قيمة تمثل $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$. وبناءا على هذه النتيجة إقترح Legendre تصغير مجموع مربعات الأخطاء وهو ما يسمى بالمربعات الصغرى.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - g_i(\theta))^2 \ldots\ldots\ldots(1.10)$$

مـع إفتراض أن الدالـة $g_i(\theta)$ تقبـل الإشـتقاق وكذلـك $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$. وتعطـي المعادلات الطبيعية على الشكل:

$$(-2)\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - g_i(\theta)\right]\frac{\partial}{\partial \theta_k} g_i(\theta) = 0 \ldots\ldots\ldots(1.11)$$

$$k = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

$$m < n$$

بينمـا يقـترح Gauss إضافـة التوزيـع الإحتمـالي. حيـث إذا كـانت العينـة العشـوائية $X = (X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n)'$ لهـا دالـة كثافـة $f(x)$ والوسـط x_n هو قيمة تمثيلية من أجل كل X_i. فإن دالة الكثافة يجب أن تكون طبيعية أي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}.\exp\left[\frac{-1}{2\sigma_x^2} x^2\right];\ x \in R \ldots\ldots(1.12)$$

ومنه يضع Gauss المشكل على النحو التالي:

$$y_i = g_i(\theta) + u_i\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \ldots\ldots(1.13)$$

$$u_i \sim IN(0, \sigma_u^2)\ ;\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n \ldots\ldots(1.14)$$

يشتق بعد ذلك توزيع العينة الممثل لمجموعة الملاحظات $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$.

$$f(y, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}.\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2} \bullet \sum_{i=1}^{n}(y_i - g_i(\theta))^2\right] \ldots\ldots(1.15)$$

وتعظيـم هذه الدالـة $f(y, \theta)$ بالنسبـة لـ θ. يعطي نفس المقدر لـ θ عندما نقوم بتصغيـر مجمـوع مربعات الأخطـاء $\text{Min}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - g_i(\theta)\right]^2$. وبتطبيـق طريقـة المربعات الصغرى عادة على النماذج الخطية تكون:

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} \theta_k x_{ki} + u_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n \ldots(1.16)$$

وتعوض فرضية التوزيع الطبيعي بالفرضيات التالية:

i) $E(u_i) = 0$

ii) $Var(u_i) = \sigma_u^2$ ……………(1.17)

iii) $Cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j) = 0\ :\ i \neq j\ ,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$

2- **طريقة العزوم**

حسب الطريقة السالفة الذكر، نكتشف بأن المربعات الصغرى ليست قاعدة عامة للتقدير، لأنها تفترض وجود دوال تقريبية $g_1(\theta)$ تلعب دور الوسيط في النموذج الإحتمالي. لكن عمليا، نجد أن المعالم غير المعروفة ليست مرتبطة مع الوسط، بل تكون لها علاقة مع عزوم من درجة أعلى (مثل التباين). وهذا ما جعل Pearson (1894) يقترح طريقة العزوم كطريقة عامة للتقدير.

لنفرض أن $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ هي عينة عشوائية من $f(x, \theta)$، حيث $\theta \in R^k$. إن العزوم الأولى لـ $f(x, \theta)$ هي، بالتعريف، دوال للمعالم غير المعروفة، ما دام:

$$\mu'_v(\theta) = \int x^v f(x, \theta)\, dx \; : \; v \geq 1 \; ....(1.18)$$

ومن أجل تطبيق هذه الطريقة، نمثل المعالم غير المعروفة θ على الشكل:

$$\theta_i = g_i(\mu'_1, \mu'_2, ...\mu'_k) \; : \; i = 1, 2, ..., k \; ....(1.19)$$

حيث g_i دوال مستمرة. وتقترح هذه الطريقة لتقدير θ، إستعمال فكرة التعويض كما يلي:

$$\hat{\theta}_i = g_i(m_1, m_2, ..., m_k) \; : \; i = 1, 2, ..., k \; ... \; ...(1.20)$$

حيث ان القيمة $m_v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^v \; ; \; v > 1$ تمثل عينة العزوم الأولية و كمقدرات لـ θ.

ومنه اذ كانت μ'_i ، $\mu'_1, \mu'_2, ...$ هي دوال لـ θ فإن:

$$m_v \xrightarrow{a.s} \mu'_v \; : \; v \geq 1$$

وبالتالي $\hat{\theta}_i \xrightarrow{a.s} \theta_i$

(حيث أن a.s تعني التقارب المؤكد والمشروح بالفصل الخامس).

وبالرغم من أن طريقة العزوم تعطي مقدرات متسقة، لكنها غير كفوءة. وهذا ما إكتشفه Fisher في الثلاثينات من هذا القرن .

3- طريقة المعقولية العظمى:

نظرا للاشكال المطروح في طريقة العزوم. فإن الباحث Fisher قام بإقتراح وتطوير طريقة المعقولية العظمى عبر مجموعة من البحوث المنشورة خلال فترة الثلاثينات. ثم توسعت هذه المناقشات الى كتاب وباحثين آخرين أمثال Cramer، Rao و Wald وتعتبر هذه الأخيرة من افضل الطرق المستعملة في التقدير. حيث تلعب دورا هاما في إختبار الفرضيات. وتعتمد هذه الطريقة على دالة المعقولية العظمى التي تنطلق من فترة سحب كل ملاحظات (مشاهدات) العينة للمتغير العشوائي مرة واحدة دون الاعتماد على قانون التوزيع الطبيعي. وسوف نتطرق لهذه الطريقة بالتفصيل في تحليلنا ودراستنا القادمة عند مناقشة نظرية العينات الكبيرة والتوزيعات التقاربية بالفصل الخامس لاحقا.

1-4-5 خصائص المقدرات

هناك بعض الخصائص المفضلة لمقدرات والتي سنحتاجها في تحليلنا لاحقا، وقبل ذكر هذه الخصائص نورد المفاهيم التالية:

لتكن لدينا القيمة $\hat{\theta}$ والتي هي مقدرة المعلمة الحقيقية θ وحيث θ هي معلمة المجتمع. بينما $\hat{\theta}$ هي مقدر العينة (n) فإن

i) $\hat{\theta} - \theta$ خطأ المعاينة

ii) $E(\hat{\theta}) - \theta =$ قيمة التحيز

iii) $E(\hat{\theta} - \theta)^2 =$ وسط مربع الخطأ

$$iv)\ E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2 = \text{التباين}$$

إن خطأ المعاينة هو عبارة عن الفرق بين قيمة المقدرة $\hat{\theta}$ والقيمة الحقيقية للمعلمة θ. ويتغير حجم خطأ المعاينة من عينة لأخرى. أما التحيز فهو الفرق بين وسط توزيع العينة للمقدرة. $E(\hat{\theta})$. والقيمة الحقيقية لتلك المعلمة θ إن هذا الفرق (في التحيز) هو قيمة ثابتة يمكن أن تساوي الصفر أو تختلف عنه.

أما وسط مربع الخطأ فهو مرتبط بتشتت توزيع أية مقدرة $\tilde{\theta}$. وبالتالي فهو قريب من مفهوم التباين. ... ق بين التباين لمقدرة ما $\hat{\theta}$. ووسط مربع خطئها هو أن التباين يقيس تشتت التوزيع حول وسط

$Var(\hat{\theta}) = E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2$. بينما يقيس وسط مربع الخطأ التشتت حول قيمة المعلمة الحقيقية $.M.S.E(\hat{\theta}) = E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$

إذا تطابق وسط التوزيع مع القيمة الحقيقية للمعلمة. يكون التباين ووسط مربع الخطأ متساويين.

ويمكن أن نبين العلاقة بين التباين ووسط مربع الخطأ كما يلي:

$$M.S.E(\hat{\theta}) = E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 = E\left[\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)+\left(E(\hat{\theta})-\theta\right)\right]^2$$

$$= E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2 + E\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2 + 2E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]$$

وما دام الحد الثالث معدوم فإن:

$$M.S.E(\hat{\theta}) = E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2 + E\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + |\text{قيمة التحيز}|^2 \quad \ldots\ldots\ldots(21.1)$$

وهذا يعني أنه يستحيل أن تكون قيمة وسط مربع الخطأ أصغر من التباين

$$M.S.E(\hat{\theta}) - Var(\hat{\theta}) = \left[E(\hat{\theta}) - \theta\right]^2 \geq 0$$

$$M.S.E(\hat{\theta}) \geq Var(\hat{\theta}) ....(1.22)$$

وهناك نوعان من الخصائص المفضلة للمقدرات. النوع الأول يعتني بالعينات الصغيرة الحجم. أما الثاني فيهتم بالعينات الكبيرة.

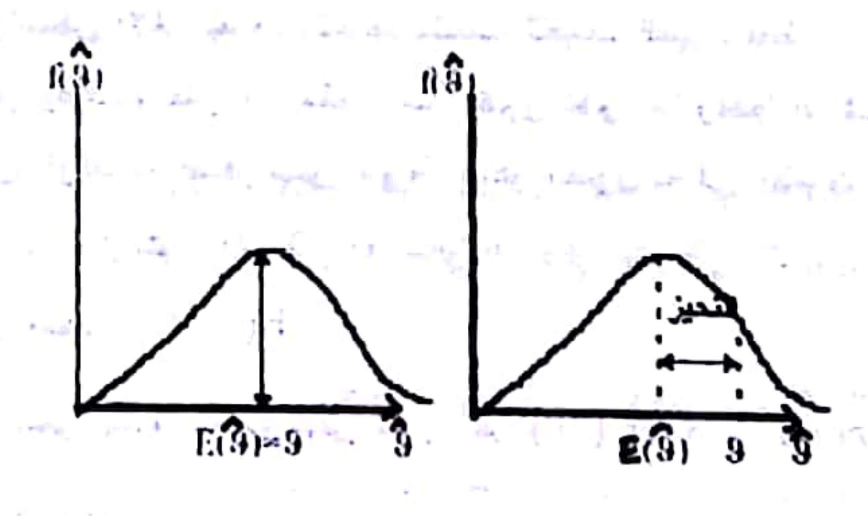
1) خصائص العينات الصغيرة Small Sample Properties

a) عدم التحيز Unbiasedness

يكون مقدر ما $\hat{\theta}$ غير متحيز إذا كان وسطه $E(\hat{\theta})$ مساويا لقيمة المعلمة الحقيقية θ. والتي نكون قد قمنا بتقديرها. و نكتب ذلك كما يلي:

$$E(\hat{\theta}) = \theta ....(1.23)$$

حيث نقول في هذه الحالة بأن $\hat{\theta}$ هو مقدر θ غير المتحيز كما هو مبين بالشكل(4).



(a) الشكل(4) (b)

لكن هذه الخاصية غير كافية أو غير كاملة لأنها لا تأخذ بعين الإعتبار تشتت وتوزيع المقدر. ففي الحياة العملية يمكن أن نحصل على مقدر غير متحيز ولكن بتباين كبير. أو على مقدر متحيز ويتباين صغير عن الأول. في هذه الحالة نحتار أيهما أحسن. وهذا يشجعنا للبحث عن خاصية أخرى. قبل ذلك. نقول إذا واجهنا مشكلا من هذا النوع في تحاليلنا الإقتصادية والإحصائية، فإننا نبحث عن الهدف من الدراسة التي نقوم بها. فإذا كان الهدف من دراستنا هو تحليل سياسة إقتصادية أو ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة ومعروفة. نأخذ المقدر الذي يكون غير متحيز. أما إذا كان هدفنا هو التنبؤ بظاهرة أو حادثة (تصرف) إقتصادية ما. فهنا لاتعنينا قيمة (خاصية) التحيز بقدر ماتهتم بقيمة التشتت الصغيرة. أما إذا كان هدفنا من الدراسة هو التحليل والتنبؤ معا، فنكون مضطرين لتغيير طريقة التقدير أو إستعمال طرق إحصائية أخرى من أجل الحصول على مقدر يحقق أهداف الدراسة.

b) خاصية الكفاءة Efficiency

نظرا للمشكل المذكور بالخاصية الأولى، يساوي بعض الكتاب خاصية الكفاءة مع أصغر وسط مربع الخطأ Minimum Mean Square Error (M.M.S.E). والبعض الأخر يعرف الكفاءة بالنسبة للعينات الكبيرة فقط.

وهناك فريق آخر يعرف ويعتبر أن مقدرا ما، يكون كفوًا إذا وفقط إذا كان غير متحيز وفي نفس الوقت له أصغر تباين ، وهذا ماهو معمول به في تقنيات القياس الإقتصادي الحديث. إذن يكون $\hat{\theta}$ مقدر θ الكفؤ إذا توفر الشرطان التاليان:

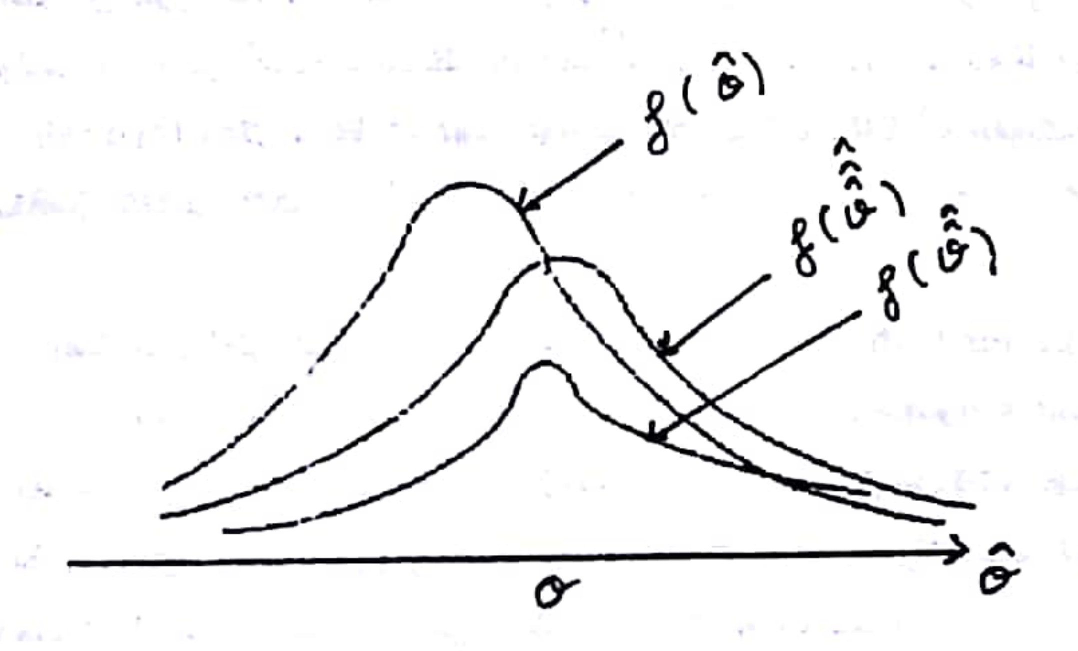
I) $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز $E(\hat{\theta})=\theta$

II) $\hat{\theta}$ له أصغر تباين بالمقارنة مع تباين مقدر آخر $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\hat{\theta}})$

حيث أن $\hat{\hat{\theta}}$ هو أي مقدر غير متحيز آخر لـ θ.

ويعرف المقدر الكفؤ بأنه ذلك المقدر غير المتحيز و ذو أصغر تباين Minimum Variance Unbiased Estimator (MVUE)، أو أفضل مقدر

غير متحيز (BUE: Best Unbiased Estimator) كما نلاحظ بأن المقدر المتحيز لايمكن أن يكون كفوءا حتى وإن كان له أصغر تباين. ويمكن شرح ذلك من خلال الشكل(5).



الشكل(5).

من الشكل(5) لدينا توزيعات لثلاثة مقدرات هي $\hat{\theta}$، $\hat{\hat{\theta}}$، $\hat{\hat{\hat{\theta}}}$. ومن هذه المقدرات لدينا $\hat{\theta}$ لها أصغر تباين، ولكنها غير كفوءة بسبب ظاهرة تحيزها. بينما $\hat{\hat{\theta}}$، $\hat{\hat{\hat{\theta}}}$ مقدران غير متحيزين. لكن $\hat{\hat{\hat{\theta}}}$ لها تباين أكبر من تباين $\hat{\hat{\theta}}$. وبالتالي فإن $\hat{\hat{\hat{\theta}}}$ هو مقدر غير كفوء. وهذا يترك $\hat{\hat{\theta}}$ هو المقدر الكفوء شريطة ألا يكون هناك مقدر آخر غير متحيز وبأصغر تباين من تباين $\hat{\hat{\theta}}$.

نلاحظ بأنه عندما تكلمنا عن خاصية عدم التحيز، قمنا بمجرد تطبيق التوقع الرياضي علـى مقدرة المعلمـة، أي وسط توزيـع المعاينـة $E(\hat{\theta})$. بينمـا بالنسبة لخاصية الكفاءة فإن القضية أصبحت معقدة أكثر، بحيث أننـا أصبحنـا مجبرين على إجراء مقارنة بين تباينات كل المقدرات غير المتحيزة الموجودة لدينا. لكن، ميدانيا، يمكن أن يكون عدد هذه المقدرات لا نهائي و بالتالي يصعب الحصول على أحسنها. وللخـروج مـن هـذه المشـكلة جـاءت متراجحـة كرامـر–رو Cramer-Rao Inequality والتي سنتطرق لها بـالتفصيل عند دراستنا لنظريـة العينـات الكبيرة بالفصل الخامس لاحقا.

c) أفضل مقدرخطي غير متحيز Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)

لاحظنـا فـي الخاصيـة الثانيـة، أنـه إذا كـانت لدينـا مجموعـة كبـيرة مـن المقدرات غير المتحيزة، فإن مشكلة الحصول علـى أصغر تبـاين تعتـبر صعبـة فـي بعض الأحيان، وذلك حتى وإن استعنا بمتراجحة كرامـر–رو. وللتبسـيط أكـثر نـأخذ مجموعة أصغر من المقدرات غير المتحيزة، وذلك بتقيدنا بمجموعة المقـدرات غير المتحيزة وذات الدوال الخطية من نفس عينة الملاحظات (مـع الاحتفاظ بخاصية عدم التحيز وأصغر تباين). لنحصل على أفضل مقـدر خطـي غـير متحـيز BLUE والـذي من شروطه أن تكون:

I) $\hat{\theta}$ دالة خطية لعينة الملاحظات

II) $\hat{\theta}$ مقدر θ غير المتحيز

III) $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\hat{\theta}})$ حيث $\hat{\hat{\theta}}$ هو أي مقدر خطي غير متحيز آخر لـ θ.

2- خصائص العينات الكبيرة Large Sample Properties

a) عدم التحيز التقاربي: Asymptotic Unbiasedness

تكون $\hat{\theta}$ مقدرة θ غير المتحيزة تقاربيا إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta ....(1.24)$$

وهذا يعني أن أي مقدر يكون غير متحيز تقاربيا، إذا كلما إقترب حجم العينة من ما لا نهاية يصبح هذا المقدر غير متحيز. كما أنه إذا كان المقدر غير متحيز أصلا، فإنه يكون، ضمنيا، غير متحيز تقاربيا. بينما العكس ليس دائما صحيحا.

b) الإتساق Consistency

تكون $\hat{\theta}$ مقدرة θ المتسقة إذا كانت

$$i)\ \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = plim(\hat{\theta}) = \theta ....(1.25)$$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} \left[Var(\hat{\theta})\right] = plim\left[Var(\hat{\theta})\right] = 0.......(1.26)$$

حيث أن: $plim(.)$ هي نهاية الإحتمال Probability limit.

ولمعرفة ما إذا كان مقدر ما متسقا أم لا، نلاحظ تحيزه وتباينه عندما يقترب حجم العينة من ما لا نهاية. فإذا كان إرتفاع حجم العينة مرافقا بإنخفاض في قيمة التحيز والتباين معا، ويستمر ذلك الإنخفاض في التحيز والتباين حتى يقترب من الصفر أو يساويه كلما إقترب حجم العينة n من ما لا نهاية، فإننا نقول عن ذلك المقدر بأنه مقدر متسق.

c) الكفاءة التقاربية Asymptotic Efficiency

تكون $\hat{\theta}$ مقدرة θ الكفؤة تقاربيا، إذا توفرت الشروط التالية:

I) $\hat{\theta}$ مقدرة θ المتسقة.

II) $\hat{\theta}$ لها توزيع تقاربي[2] بوسط وتباين مختلفين عن ما لا نهاية.

III) لايوجد أي مقدر متسق آخر له تباين تقاربي أصغر من التباين التقاربي لـ $\hat{\theta}$

حيث نعرف التباين التقاربي لـ $\hat{\theta}$ كما يلي:

$$\text{Asymptotic Variance } (\hat{\theta}) = \text{Avar}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} E\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta})\right)\right]^2 \quad .....(1.27)$$

---

[2] سنتطرق بالتفصيل لمفهوم التوزيعات التقاربية بالفصل الخامس

1) ماذا نعني بالقياس الإقتصادي ؟

2) ما الفرق بين النموذج الإقتصادي ونموذج القياس الإقتصادي ؟

3) ماهي أهداف ومناهج القياس الإقتصادي ؟

4) وضح كيف يمكن لنا إختبار النظرية الإقتصادية ؟

5) ما الفرق بين المتغيرات الإقتصادية والمتغيرات العشوائية ؟

6) ماذا نقصد بالمقدر ؟ وماهي طرق التقدير الكلاسيكية في القياس الإقتصادي ؟

7) ما الفائدة من دراسة خصائص المقدرات؟ أعطي مثالا عن ذلك.

8) ماهي المعايير المستعملة في تقييم نتائج علاقة مقدرة ؟ وأي معيار من هذه الأخيرة يكون أهم؟

9) في دالة الطلب الخطية التالية: $D = \alpha + \beta p + u \ (\beta < 0)$

بين بأن الميل β هو مكونة مرونة سعر الطلب. حيث أن p تمثل السعر، و D دالة الطلب.

10) وضح العلاقة ما بين تباين مقدر ما ووسط مربع خطئه

الفصل الثاني: نموذج الإنحدار الخطي البسيط

2-1 نموذج الإنحدار

يعتبر تحليل الإنحدار الأداة المشتركة والمستعملة في أبحاث القياس الإقتصادي. ويهتم تحليل الإنحدار بتحديد وتقييم العلاقة الموجودة بين متغير معطى (عادة مايسمى بالمتغير التابع أو المتغير المشروح) ومتغير أو متغيرات أخرى (عادة ما تسمى بالمتغيرات المفسرة أو المتغيرات المستقلة). لقد أستعملت كلمة إنحدار من طرف F.Galton (1822-1911) من بريطانيا عندما كان يدرس العلاقة الموجودة بين قامتي الأبناء وأبائهم.

لنأخذ مثالا عن العلاقة السببية لإنحدار متغير ما في متغير آخر. فإذا عرفنا: Y هي الإنفاق الإستهلاكي للعائلات، X_1 هي دخل العائلة المتاح، X_2 هي عدد أفراد كل عائلة. نحاول، هنا، تحديد العلاقة الموجودة بين الإنفاق الإستهلاكي للعائلات من جهة، ودخل هذه العائلات من جهة أخرى. وهناك عدة أهداف لدراسة هذه العلاقة منها:

1) تحليل الآثار المترتبة عن السياسات المتخذة في تغير وحدات X_1(أي هنا الدخل)

2) التنبؤ بقيمة المتغير التابع Y(الإنفاق الإستهلاكي) لما تعطى لنا مجموعة قيم X_1.

3) إختبار ما إذا كانت أية متغيرة من المتغيرات X_1 لها أثر إيجابي على المتغير التابع Y.

من المثال المذكور أعلاه، تخبرنا النظرية الإقتصادية بأن هناك علاقة موجبة بين قيمة الإنفاق الإستهلاكي للعائلات و قيمة الدخل المتاح و المتحصل عليه من طرف هذه العائلات. فلما ترتفع المداخيل، تتبعها زيادة في الإنفاق (أو في الإدخار)، لكن العكس ليس دائما صحيحا. و إعتمادا على الخطوات المذكورة في الفصل الأول، فإن المهمة الأولى لباحث القياس الإقتصادي هي تخصيص نموذج

دالة الإستهلاك. أي تحديد المتغير التابع و المتغيرات المستقلة و عدد المعادلات التي يحتويها النموذج، شكلها الرياضي، عدد المتغيرات المستقلة، إشارة و قيم معالم النموذج وغيرها.

و في مثالنا إذا كان عدد أفراد العائلة X_2 غير معروف فتقترح علينا مبادئ النظرية الإقتصادية بأن المتغير التابع هو الإنفاق الإستهلاكي (Y)، أما المتغير المستقل فهو دخل (مداخيل) هذه العائلات X. و يكون الشكل الرياضي لهذه العلاقة كما يلي:

$$Y = f(X) \quad ....(2.1)$$

و يمكن أن تكون لدينا توقعات نظرية مسبقة حول إشارة المشتقة الجزئية الأولى لهذه الدالة $f(X)$، أو حول مجال القيم التي تنتمي إليها. فإذا فرضنا أن الدخل هو المحرك الرئيسي لتغير إنفاق العائلة، يكون الشكل الرياضي لدالة الإستهلاك كما يلي:

$$y_1 = \alpha + \beta\, x_1 \quad ......(2.2)$$

و تكون α، β هي معالم الدالة و هدفنا هو الحصول على مقدرات عددية لهذه المعالم المذكورة. و ننتظر أن تكون القيمة التقديرية لـ β محصورة ما بين الصفر و الواحد لأنها تمثل الميل الحدي للإستهلاك. إن التخصيص الخطي للعلاقة المذكورة بالمعادلة(2.2)، هو نتيجة للمثال المذكور عن دالة الإستهلاك. لكن عمليا يمكن أن نواجه تخصيصات رياضية لبعض العلاقات الإقتصادية غير الخطية و المعقدة أكثر، حيث يمكن أن تكون هذه التخصيصات في عدة أشكال (ليس بالضرورة أن تكون خطية) مثل:

i) $Y = \alpha X^{\beta}$

ii) $Y = \alpha + \beta / X \quad ....(2.3)$

iii) $Y = \alpha + \beta X + \gamma \sqrt{X}$

iv) $Y = \alpha + \beta X^{\gamma}$

إن التخصيص المذكور بالمعادلة الأولى في (3.2) يمكن تحويله إلى شكل خطي عن طريق إدخال اللوغاريتم الطبيعي على هذه الأخيرة لتعطي:

$$\log Y = \log \alpha + \beta \log X = A + \beta \log X$$

حيث تصبح المعادلة المحولة أعلاه خطية في $\log Y$، و$\log X$. أما المعادلة الثانية فهي خطية في Y و مقلوب X. كذلك في المعادلة الثالثة يمكن تحويلها إلى الشكل الخطي إذا وضعنا: $X = Z_1$، $\sqrt{X} = Z_2$ لينتج $Y = \alpha + \beta Z_1 + \gamma Z_2$. أما المعادلة الأخيرة، فلا يمكن تحويلها إلى الشكل الخطي و بالتالي لا يمكن أن نطبق عليها الطرق التي سوف نناقشها في هذا الفصل. بل إنها تخضع لطرق أخرى تناقش في تحليل الإنحدار غير الخطي.

إن الخطوة الأولى لتطبيقات القياس الإقتصادي في إيجاد العلاقة ما بين الإنفاق الإستهلاكي للعائلات Y ، و مداخيل هذه العائلات X ، هي الحصول على n زوج من الملاحظات الخاصة بهذين المتغيرين. و نكتب عينة الملاحظات Y_i وX_i، حيث $i = 1, 2, \dots\dots, n$. ثم يجب إختيار التخصيص المناسب من المعادلات السابقة الذكر (من (2.2) إلى (3.2)). و يكون الإختيار بناءا على تمثيل البيانات الأولية أو تحويلاتها على محورين متعامدين في شكل إنتشاري. فإقتصاديا، تمثل α، بالمعادلة (2.2)، حد الكفاف، و β الميل الحدي للإستهلاك. أما هندسيا تمثل α الحد الثابت الذي يصنعه الخط الذي يمر على المحور العمودي Y. أما β فتمثل ميل هذا الخط.

بعد ذلك، يواجه باحث القياس الإقتصادي مشكلة إستعمال بيانات العينة للحصول على مقدرات عددية للمعالم غير المعروفة α،β. و إذا كانت العلاقة الموجودة ما بين إنفاق العائلات و إستهلاكها صحيحة، نحصل على عدة نقاط منتشرة، تسمى بالشكل الإنتشاري. إن إيصال هذه النقاط ببعضها البعض يعطينا ذلك الخط المائل. و تكون العلاقة الدالية صحيحة كما هو مبين في المعادلة (2.2). لكن التصرفات الإقتصادية، عمليا، تكون مختلفة و بالتالي غالبا ما يعطينا الشكل الإنتشاري للعلاقة المدروسة نقاطا مختلفة، و ليست كلها على نفس الخط نظرا

لوجود متغيرات أخرى غير معروفة أو من الصعب الحصول على بيانات تمثلها. هذا الشكل يؤدي بنا إلى توسيع العلاقة السابقة بالمعادلة (2.2) إلى الشكل:

$$Y_1 = \alpha + \beta X_1 + u_1 ....(2.4)$$

حيث يسمى u_1 الخطأ أو عنصر الإضطراب (Disturbance term) العشوائي، و له توزيع إحتمالي معين أي أنه متغير عشوائي. يمثل المقدار $\alpha + \beta X_1$ بالمعادلة (4.2) العلاقة المحددة لـ Y. أما u_1 فيعبر عن العلاقة العشوائية. و منه، نطرح السؤال التالي: لماذا نضيف عنصر الخطأ u_1 للعلاقة (2.2)؟ و ما هي مصادر الخطأ في هذه المعادلة؟ نقول توجد عدة مصادر لهذا الخطأ منها:

1- التصرفات العشوائية غير المتوقعة للأفراد. فمثلا في مثالنا عن إنفاق العائلات، تكون بعض التصرفات الخاصة بها غير معروفة. إذ أن العائلة (A) تنفق دخلها بشكل واسع في شهر معين، ثم إن نفس العائلة قد تضطر إلى إدخار جزء هام من دخلها في شهر آخر و بالتالي يقل إنفاقها في ذلك الشهر. كما أنه من غير المنطقي أن تنفق كل العائلات ذات الدخل X_1 نفس القيمة $\alpha + \beta X_1$. فحتى العائلات الأخرى ذات نفس الدخل X_1 و من نفس الحجم و التركيب لها إختلافات في عادات و أنواع الإستهلاك.

2- الأثر الذي يحدثه حذف متغيرات مهمة من المعادلة المدروسة، فبالنسبة لبعض العائلات لايكون الدخل هو المحدد الوحيد للإنفاق الإستهلاكي، بل هناك متغيرات مهمة أخرى مثل حجم العائلة، ذوق أفراد العائلة، توفر السلع في السوق، عادات و تقاليد العائلة وغيرها. فبعض هذه العوامل غير قابلة للقياس مثل العادات والبعض الآخر يمكن ألا تتوفر لدينا بيانات إحصائية عنه. و منه فإن الخطأ العشوائي u_1 يمكن أن يكون عبارة عن مجموع هذه المتغيرات القابلة للقياس (مثل حجم العائلة) و غير القابلة للقياس (العادات و الأذواق) في شكل متغير عشوائي يسمى بعنصر الخطأ أو عنصر الإضطراب العشوائي.

3- أخطاء في قياس المتغير التابع Y_i. ففي مثالنا يكون من الصعب قياس الإنفاق الإستهلاكي للعائلات بدون أخطاء.

4- قد يكون في بعض الأحيان عدد المتغيرات المستقلة و المتحكمة في المتغير التابع أكبر من عدد الملاحظات المتوفرة لدينا، و بالتالي يكون من غير الممكن الحصول على مقدرات إحصائية مقبولة.

5- خطأ في تخصيص الشكل الدالي للعلاقة المدروسة.

ونشير إلى أنه لايمكننا معرفة قيمة الخطأ العشوائي u_i مسبقا لكل ملاحظة. و لكننا نضع بعض الإفتراحات حول توزيعه الإحتمالي. حيث يمكن للخطأ u_i أن يأخذ قيما موجبة، سالبة أو معدومة و ذلك لأن أثر المتغيرات المحذوفة أو غير المقاسة يدفع Y لأن تأخذ قيما أكبر أو أقل من القيمة الحقيقية لها كما سوف نوضح في الشكل(1.2).

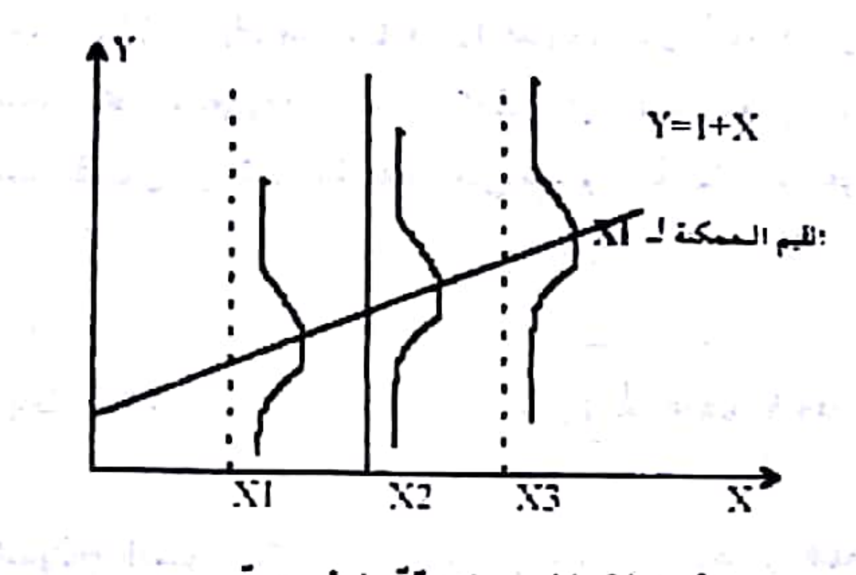
فإذا كان عنصر الخطأ u_i له توزيع مستمر و طبيعي بوسط مساو للصفر و تباين مساو للواحد. فإنه من أجل كل قيمة لـ X يكون لدينا توزيع طبيعي لـ Y. ثم إن القيمة الملاحظة لـ Y يمكن أن تكون أية مشاهدة من هذا التوزيع.

مثال (1.2): إذا كانت العلاقة بين متغيرين Y و X على الشكل:

$$Y = 1 + X + u$$

$$u_i \sim N(0,1)$$

فمن أجل كل قيمة لـ X يكون لـ Y توزيع طبيعي مثلما هو مبين في الشكل(1.2).



- الشكل(1.2) - العلاقة العشوائية

حيث أن الخط المرسوم يمثل العلاقة المحددة $Y = 1+X$. إن القيم الحقيقية لـ Y من أجل كل قيم X سوف تكون بعض النقاط على الخطوط العمودية الموضحة في الشكل أعلاه. و منه تسمى هذه العلاقة بين Y و X بأنها علاقة عشوائية.

2-2 طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

إذا كانت لدينا عينة (n) من الملاحظات Y_i و X_i. فإننا نكتب المعادلة(4.2) من جديد، ثم نقول أن هدفنا هو الحصول على مقدرات للمعالم غير المعروفة α، β لهذه المعادلة. و للقيام بذلك يجب وضع بعض الفرضيات حول النموذج. و يعرف J.M. Stigler 1981 [1] طريقة المربعات الصغرى بأنها محرك التحليل الإحصائي الحديث، و ذلك بالرغم من محدوديتها. حوادثها الطارئة و تغيراتها المتعددة، فإنه مازال يعتمد على إمتداداتها و توسيعاتها في التحليل الإحصائي و تبقى معروفة و مقيمة من طرف الجميع.

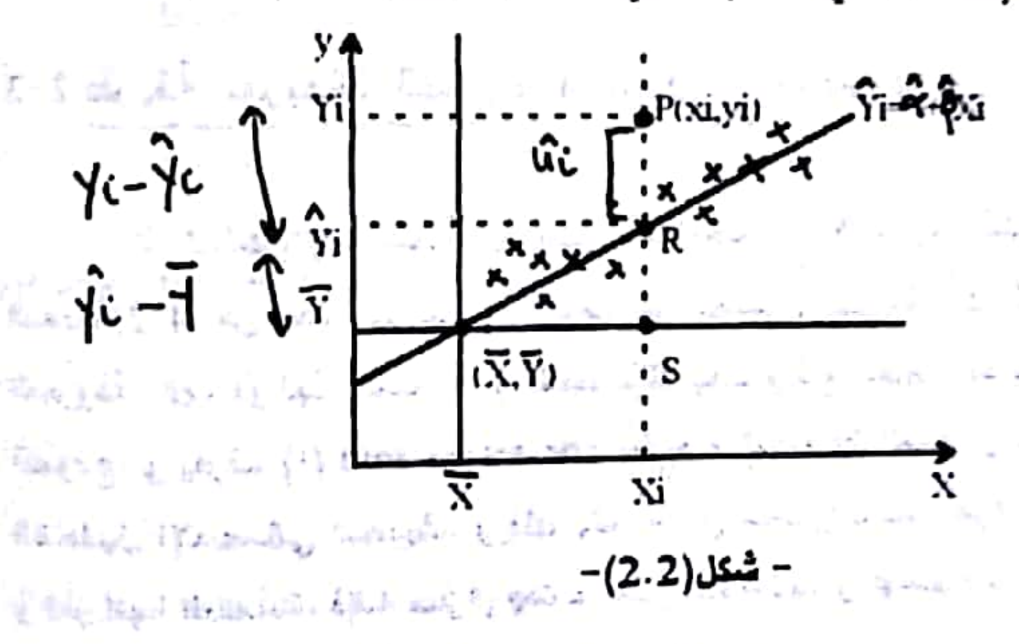
---

[1]- J.M. Stigler "Gauss and the Invention of Least Squares" The Annals of statistics Vol 9, N 3 1981

أما الكاتب والأستاذ[2] J.J. Johnston فيعرفها على أنها قانون أو طريقة تقدير بعض المعالم غير المعروفة. حيث أن المقدر هو القيمة العددية لها و الناتجة من تطبيق تلك القانون أو تلك الطريقة على مجموعة بيانات العينة المعنية بالدراسة.

3-2 الفرضيات الكلاسيكية للنموذج أو شروط Gauss-Markov:

إن النموذج المكتوب بالمعادلة (4.2) هو نموذج الإنحدار الخطي البسيط. ويمكن إيجاد مقدرات معالمه α، β دون اللجوء إلى هذه الفرضيات التي نحتاجها عند مناقشة خصائص مقدرات المربعات الصغرى فيما بعد حيث تتطلب منا المربعات الصغرى إختيار القيمتين $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ كمقدرتين للمعلمتين α، β على الترتيب. وإذا أنطلقنا من عينة الملاحظات n لكل من Y_1 وX_1 ونرسمها على محورين متعامدين Y وX، حيث يعطي هذا الزوج $(Y_1 ، X_1)$ من المتغيرات نقاطا متعددة ومنتشرة في شكل إنتشاري مثلما هو مبين بالشكل(2.2) أدناه



- شكل(2.2)-

[2]. J.J Johnston "Econometric Methods" International Student Edition Page 16 USA 1984.

إن أي خط مرسوم ما بين هذه النقاط المنتشرة يمكن أن يمثل تقديرا للعلاقة المفروضة بالمعادلة(4.2) و يكون هذا الخط ممثلا بالعلاقة التقديرية التالية:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i ; i = 1, 2, \ldots. n. \ldots\ldots (2.5)$$

حيث تمثل $\hat{Y}_i$ القيمة التقديرية الموجودة على المحور Y بالنسبة لأية قيمة تأخذها X_i. إن الخط الممثل بالمعادلة(5.2) لا يمكن أن يمر على كل النقاط الموجودة بالشكل(2.2). حيث أن بعض النقاط تظهر تحت الخط و البعض الأخر فوقه.

و ما دامت هذه النقاط تمثل سلسلة الملاحظات Y_i. فإنها عمليا سوف تنحرف عن سلسلة الملاحظات التقديرية $\hat{Y}_i$ (بقيم سالبة، موجبة، أو معدومة). وتسمى هذه الإنحرافات الموضحة في الشكل(2.2) بالبواقي (بواقي المربعات الصغرى) أو مقدرات الأخطاء و تعرف كما يلي:

$$\hat{U}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i \ldots\ldots (2.6)$$

ونقول بأن أي خط تقديري سوف ينتج عنه عينة n من البواقي. إن هدف المربعات الصغرى هو الحصول على أصغر بواقي ممكنة (سالبة أو موجبة). حيث يكون المطلوب منا إختيار المقدرتين $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ بطريقة تجعل مجموع البواقي معدوما أو أصغر ما يمكن أي: $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i = 0$. و بإدخال المجموع على (6.2) نجد:

$$\sum \hat{U}_i = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i \right) = \sum \left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i \right) = 0$$

لتعطي:

$$\sum Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum X_i \ldots\ldots (2.7)$$

أي:

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{X} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

إن المعادلة (8.2) تبين لنا بأنه يجب إختيار $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ بطريقة تجعل الخط المقدر يمر حتميا على النقطة $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ كما هو مبين بالشكل(2.2). لكن، عمليا، يمكن أن نمرر أي خط، مهما كان ميله، على النقطة $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ لنحصل على الشرط $\sum \hat{u}_i = 0$. و لهذا تشترط طريقة المربعات الصغرى قيدا آخر. لأنه في الشرط

الأول $\sum \hat{u}_i = 0$، يمكن للبواقي السالبة أن تلغي البواقي الموجبة و تكون النتيجة هي الصفر بدون أن يتحقق شرط إختيار المقدرتين $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$. و لذا، فبالإضافة إلى الشرط الأول تقترح طريقة المربعات الصغرى تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى قيمة ممكنة لتصبح كل البواقي مربعة و بالتالي موجبة. و بناءا على هذا الشرط يكون المطلوب منا إختيار المقدرتين $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ لكي يكون مجموع البواقي معدوما، و كذلك تصغير مجموع مربعات هذه البواقي. حيث نكتب:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i\right)^2 \ldots\ldots(2.9)$$

و لتصغير Q نقوم بإشتقاقها جزئيا بالنسبة للقيمتين $\hat{\alpha}$،$\hat{\beta}$ على التوالي، ثم نساوي نتيجة ذلك للصفر أي:

$$\underset{\hat{\alpha},\hat{\beta}}{\mathrm{Min}}(Q) = \partial Q / \partial \hat{\alpha} = \partial Q / \partial \hat{\beta} = 0$$

إذن ينتج لدينا من العبارة $\partial Q / \partial \hat{\alpha} = 0$ المعادلتين(7.2)و(8.2). أما من العبارة $\partial Q / \partial \hat{\beta} = 0$ نجد:

$$\sum Y_i X_i = \hat{\alpha} \sum X_i + \hat{\beta} \sum X_i^2 \ldots\ldots(2.10)$$

إن المعادلتين(7.2)و(10.2) تسميان بالمعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى. و تعويض قيمة $\hat{\alpha}$ بالمعادلة (8.2) في (10.2) يعطي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \ldots\ldots(2.11)$$

و لنعرف الإنحرافات التالية:

$$y_i = Y_i - \bar{Y} . x_i = X_i - \bar{X}$$

و منه نعيد كتابة (11.2) على الشكل:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum x_i^2}\text{.......}(2.12)$$

و من خصائص المربعات الصغرى للإنحدار الخطي نذكر:

1) يمر خط الإنحدار على النقطة $(\bar{X},\bar{Y})$ حيث $\sum \hat{u}_i = 0$

2) تكون التباينات المشتركة للعينة معدومة مع كل من قيم الملاحظات X_i و القيم التقديرية $\hat{Y}_i$ على التوالي. حيث من المشتقة الجزئية $\partial Q / \partial \hat{\beta} = 0$

نجد أن $\sum X_i \hat{u}_i = 0$

لأن:
$$Cov(X_i,\hat{u}_i) = \frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})(\hat{u}_i-\bar{\hat{u}}) = \frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})\hat{u}_i$$

و $\sum \hat{u}_i = 0$ ، $\bar{\hat{u}} = 0$

فإن:
$$Cov(X_i,\hat{u}_i) = \frac{1}{n}\sum X_i \hat{u}_i = 0$$

و كذلك نجد أن:

$$Cov(\hat{Y}_i,\hat{u}_i) = \frac{1}{n}\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})(\hat{u}_i-\bar{\hat{u}}) = \frac{1}{n}\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i)\hat{u}_i = 0$$

3) يصبح مجموع مربعات البواقي معرفا على الشكل التالي:

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i)^2$$

$$= \sum(Y_i-\bar{Y})^2 + \hat{\beta}^2\sum(X_i-\bar{X})^2 - 2\hat{\beta}\sum(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})$$

$$= \sum y_i^2 - \hat{\beta}\sum x_i y_i\text{......}(2.13)$$

ونستخلص من التحليل السابق بأن المقدرتين $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$. المعرفتين بالمعادلتين(7.2) و (10.2) هما مقدرتي المربعات الصغرى العادية Ordinary Least Squares (OLS) للمعلمتين α ، β على التوالي.

و قبل الدخول في مناقشة خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية. يجب الرجوع إلى الفرضيات الأساسية أو شروط Gauss-Markov و نذكر فيما يلي:

- الفرضية الأولى: إن الخطأ u_i هو متغير عشوائي، يأخذ قيما سالبة، موجبة أو معدومة، لكنها غير مشاهدة، و يخضع لقوانين الإحتمال. يكون وسطه أو توقعه الرياضي مساو للصفر أي $E(u_i) = 0,\ i = 1,2,.......,n$.

- الفرضية الثانية: تكون تباينات الأخطاء العشوائية u_i ثابتة و موجبة بالنسبة لكل ملاحظات العينة. أي تجانس تباينات الأخطاء لكل ملاحظات العينة Homoskedasticity أي أن $Var(u_i) = E(u_i^2) = \sigma_u^2$

- الفرضية الثالثة: عدم الإرتباط الذاتي للأخطاء، أو أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة أي أن:

$$Cov\ (u_i,u_j) = E(u_i u_j) = 0\ ,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\dots,n$$

- الفرضية الرابعة: إنتظام قيم المتغير المستقل X_i وعدم تغيرها من عينة لأخرى. و أنه مهما أختلف حجم العينة، فإن المقدار $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ يكون عبارة عن رقم منتهي finite و غير مساو للصفر. أي أن الأخطاء تكون مستقلة عن X_i.

$$Cov\ (X_i,u_i) = E(X_i u_i) = X_i E(u_i) = 0\ ,\ i = 1,2,\dots,n$$

- الفرضية الخامسة[3]: إن الأخطاء u_i موزعة طبيعيا بالنسبة لكل الملاحظات، وبناءا على الفرضيات الثلاثة الأولى تكون u_i مستقلة و موزعة طبيعيا بوسط وتباين مذكورين بالفرضيتين الأولى والثانية على الترتيب وتكتب:

3- إن الفرضية الخامسة ليست مطلوبة في مناقشتنا لخصائص مقدرات المربعات الصغرى، وإنما نحتاجها عند البحث عن توزيعات هذه المقدرات و تشكيل الإختبارات الإحصائية حول معنوياتها.

$$u_t \sim IN(0, \sigma_u^2)$$

و باستخدام الفرضية الأولى على المعادلة (4.2) نجد:

$$E(Y_t) = \alpha + \beta X_t \ldots\ldots (2.14)$$

و تسمى هذه الأخيرة بدالة إنحدار المجتمع. أما عند تعويض معلمتي المجتمع α، β بمقدرتيهما فنحصل على معادلة إنحدار العينة. و باستعمال الفرضية الثانية على معادلة الإنحدار(4.2) و (14.2) يكون تباين المتغير التابع هو نفسه تباين المتغير العشوائي لعنصر الخطأ u_t أي :

$$Var(Y_t) = Var(u_t) = E(u_t^2) = \sigma_u^2$$

و بإضافة الفرضية الخامسة يكون توزيع المتغير التابع Y_t هو:

$$Y_t \sim IN(\alpha + \beta X_t, \sigma_u^2)$$

4-2 خصائص مقدرات المربعات الصغرى

من المعادلتين (8.2) و (12.2) لدينا مقدرتي المربعات الصغرى

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = \left(\frac{\sum Y_t}{n} - \hat{\beta}\overline{X}\right)$$

و بالتعويض عن $\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum x_t Y_t}{\sum x_t^2}$ نجد:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{x_t\overline{X}}{\sum x_t^2}\right)u_t$$

و لنعرف المتغير W_t على الشكل:

$$W_t = \frac{x_t}{\sum x_t^2} \ldots\ldots (2.15)$$

و الذي يحقق الخصائص:

$$\sum W_i = 0,\ \sum W_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2},\ \sum W_i X_i = \sum W_i x_i = 1 \text{ ......}(2.16)$$

و يكون مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ هو:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}W_i\right)u_i \text{......}(2.17)$$

أما المقدر $\hat{\beta}$ فهو:

$$\hat{\beta} = \sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right) \cdot Y_i = \sum W_i Y_i \text{......}(2.18)$$

$$\hat{\beta} = \beta + \sum W_i u_i \text{......}(2.19)$$

1.4.2 خاصية عدم التحيز

مثلما وضحنا في الفصل الأول (خصائص المقدرات). فإن التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما و وسط توزيعها. فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر. نقول عن ذلك المقدر بأنه مقدر متحيز. أما إذا كان هذا الفرق مساو للصفر فإننا نقول عن ذلك المقدر بأنه مقدر غير متحيز. و إذا عدنا لمقدرتي المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ المعرفتين بالمعادلتين(17.2)و(19.2) على التوالي. نقول أن تعريف المتغير W_i بالمعادلة(15.2) يبين لنا بأنه غير عشوائي و مستقل عن الخطأ u_i. و منه يكون: $E(W_i u_i) = W_i E(u_i) = 0$. لتصبح:

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}W_i\right)E(u_i) = \alpha$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \sum W_i E(u_i) = \beta$$

لنقول أن مقدرتي المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ هما مقدرتي المعلمتين α ، β على التوالي غير المتحيزتين.

2.4.2 خاصية الكفاءة و أصغر تباين:

إن المقدر غير المتحيز و بأكبر تباين حول القيمة الحقيقية للمعلمة يكون ذا أهمية أقل من ذلك المقدر غير المتحيز و بأقل تباين. و منه نقول:

$$var(\hat{\alpha}) = E\left[\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\right]^2 = E\left[\hat{\alpha} - \alpha\right]^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} - \bar{X}W_i\right]^2 = \sigma_u^2 \cdot \frac{\sum X_i^2 \sum W_i^2}{n} \quad \ldots\ldots (2.20)$$

وكذلك:

$$var(\hat{\beta}) = E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]^2 = E\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\sum W_i u_i\right]^2 = \sigma_u^2 \sum W_i^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \quad \ldots\ldots (2.21)$$

أما التباين المشترك فهو:

$$Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = E\left[\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\right]\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right] = -\bar{X}E\left(\sum W_i u_i\right)^2$$

$$Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = -\bar{X}\sigma_u^2 \sum W_i^2 = \frac{-\bar{X}\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \quad \ldots\ldots (2.22)$$

لا يمكننا إصدار حكم حول خاصية أصغر تباين للمقدرتين $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ لأننا نحتاج إلى مقارنتهما بتباينات مقدرات أخرى. و لهذا نبحث عن خاصية أخرى تمكننا من ذلك.

3.4.2 أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE

تنطلق هذه الفكرة من نظرية Gauss-Markov و التي تقول:

من بين المقدرات الخطية و غير المتحيزة، تكون مقدرتي المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ أفضل مقدرتين خطيتين و غير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية و غير المتحيزة الأخرى. و لإثبات ذلك نعرف أيّ مقدر خطي آخر لـ β.

$$b = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i \quad ....(2.23)$$

$$C_i = W_i + d_i$$

إن W_i هو عبارة عن قيم ثابتة غير متحركة في كل العينات المتكررة مثلما هو معرف بالمعادلة(15.2)، وله الخصائص المذكورة بالمعادلة(16.2)، أما d_i فهو عبارة عن ثابت مختار. و لكي يكون b مقدر β غير المتحيز. يجب أن تتوفر بعض الشروط في d_i:

$$b = \sum C_i Y_i = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i + \sum C_i u_i$$

$$E(b) = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i$$

و يكون $E(b) = \beta$ إذا و فقط إذا تحقق الشرطان:

$$i) \sum C_i = 0$$

$$ii) \sum C_i X_i = 1 \quad ....(2.24)$$

و منه تظهر الشروط الواجب توفرها في d_i و هي:

$$i) \sum d_i = 0, \ \sum d_i X_i = \sum d_i x_i = 0 \quad ....(2.25)$$

ليصبح تعريف المقدر b بالمعادلة (23.2) على الشكل:

$$b = \beta + \sum C_i u_i \quad ....(2.26)$$

أما تباينه فهو:

$$Var(b)=E(b-\beta)^2=E\left(\sum C_i u_i\right)^2=\sigma_u^2\sum C_i^2 \quad ....(2.27)$$

و بالمقارنة بين (27.2) و(21.2) نجد:

$$Var(b)=\sigma_u^2\sum W_i^2+\sigma_u^2\sum d_i^2$$

مع $\sum W_i d_i=0$

$$Var(b)=Var(\hat{\beta})+\sigma_u^2\sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

و منه فإن:

$$Var(b)-Var(\hat{\beta})=\sigma_u^2\sum_{i=1}^{n} d_i^2\geq 0$$

من المؤكد أن $\sum d_i^2$ غير سالبة، و تساوي الصفر فقط إذا كانت كل قيمة

لـ d_i مساوية للصفر. إذن يكون لمقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ أصغر تباين بالمقارنة مع كل تباينات المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى.

وبالتالي يحقق نظرية Gauss- Markov.

أما بالنسبة للمقدرة $\hat{\alpha}$، فلدينا من المعادلة (17.2):

$$\hat{\alpha}=\alpha+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\bar{X}W_i\right)u_i$$

و لنعرف أي مقدر خطي و غير متحيز آخر على الشكل:

$$a=\sum_{i=1}^{n} M_i Y_i$$

$$M_i=m_i+S_i \quad ....(2.28)$$

و نعيد كتابة المقدرة $\hat{\alpha}$ على الشكل :

$$\hat{\alpha}=\sum\left[\frac{1}{n}-\bar{X}W_i\right]Y_i=\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i \quad ....(2.29)$$

$$m_i = \frac{1}{n} - \bar{X}W_i$$

حيث تصبح m_i عبارة عن متغير غير عشوائي و له الخصائص التالية:

$$\sum m_i = 1, \ \sum m_i X_i = 0, \ \sum m_i^2 = \frac{Var(\hat{\alpha})}{\sigma_u^2} \quad ....(2.30)$$

لكي يكون a مقدر α غير المتحيز يجب أن تتوفر بعض الشروط في S_i:

$$a = \sum M_i Y_i = \alpha \sum M_i + \beta \sum M_i X_i + \sum M_i u_i$$

$$E(a) = \alpha \sum M_i + \beta \sum M_i X_i = \alpha$$

إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$i) \ \sum M_i = 1$$

$$ii) \ \sum M_i X_i = 0 \quad ....(2.31)$$

و منه بتطبيق الخاصية الموجودة بالمعادلة (31.2) نجد الشروط الواجب توفرها في S_i كما يلي:

$$\sum S_i = 0, \ \sum S_i x_i = \sum S_i X_i = 0 \quad .....(2.32)$$

أما التباين فهو:

$$a = \alpha + \sum M_i u_i \quad ....(2.33)$$

$$Var(a) = E\left[\sum M_i u_i\right]^2 = \sigma_u^2 \sum M_i^2 \quad ......(2.34)$$

و مقارنة بسيطة بين المعادلتين (34.2) و (20.2) نجد:

$$Var(a) = \sigma_u^2 \sum m_i^2 + \sigma_u^2 \sum S_i^2$$

لأن $\sum S_i m_i = 0$. ومنه نجد:

$$Var(a) = Var(\hat{\alpha}) + \sigma_u^2 \sum S_i^2$$

$$Var(a) - Var(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \sum S_i^2 \ \geq 0$$

و بنفس الطريقة يظهر أن $\hat{\alpha}$ له خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز و يحقق شروط نظرية Gauss-Markov.

2-4-4 خاصية الإتساق Consistency

إذا واجهنا مشكلة تحيز مقدرة ما، فإننا ننظر إلى الخاصية التقاربية لذلك المقدر. و يحدث ذلك لما يكون المتغير المستقل X عبارة عن متغير تابع و متأخر بفترة زمنية ما Lagged Endogenous Variable. و نقول عن $\hat{\beta}$، مثلا، بأنه مقدر متسق لـ β Consistent estimator، إذا كلما $n \to \infty$ فإن توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}$ يقترب من القيمة الحقيقية β. و نقول أن النهاية الإحتمالية للمقدر $\hat{\beta}$ هي β و نكتب:

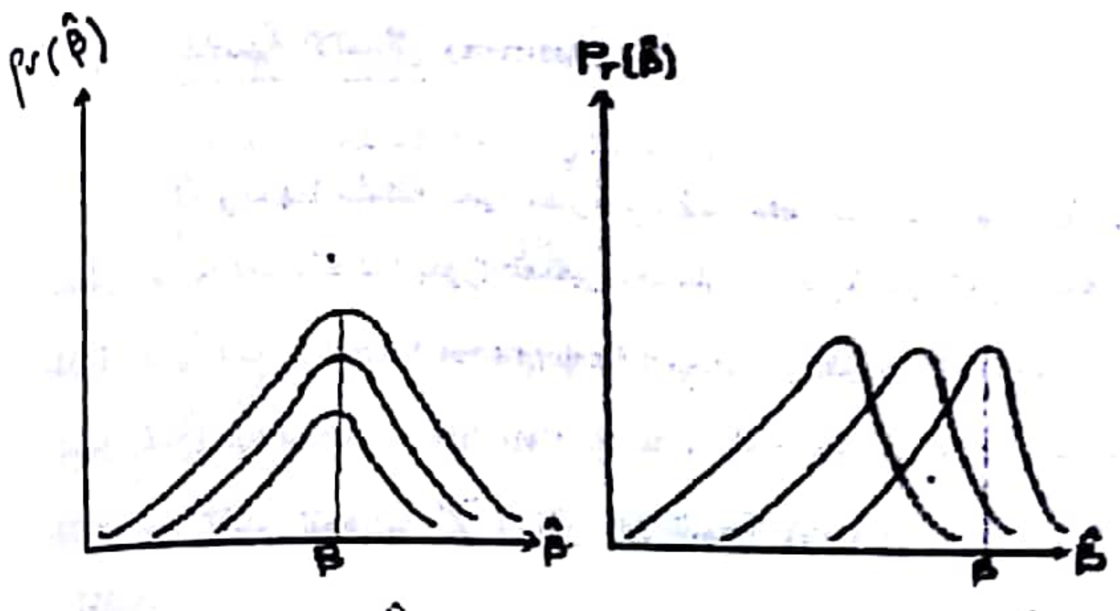
$$\underset{n \to \infty}{\text{Plim}}(\hat{\beta}) = \beta$$

لكن هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق، بل يجب أن تكون قيمتي التحيز و التباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما أقترب حجم العينة n من مالانهاية أي:

$$\text{i)} \quad \lim_{n \to \infty} E(\hat{\beta}) = \underset{n \to \infty}{\text{Plim}}(\hat{\beta}) = \beta$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{n \to \infty} \text{var}(\hat{\beta}) = \underset{n \to \infty}{\text{Plim}}\, \text{var}(\hat{\beta}) = 0$$

و بتحقق هذين الشرطين نقول عن المقدر $\hat{\beta}$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية β. و يمكن توضيح ذلك في الشكلين(3.2)و(4.2).



الشكل(4.2) $\hat{\beta}$ متحيز و لكنه متسق　　　الشكل(3.2) $\hat{\beta}$ غير متحيز

و بتطبيق الشرطين الخاصين بالإتساق على المقدر $\hat{\beta}$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}) = \beta + \lim_{n\to\infty} \sum W_i \, E(u_i) = \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sum X_i^2}\right) = 0$$

حيث كلما $n \to \infty$ فإن المقدار $\sum X_i^2$ يصبح ضخما و منه تكون نهاية المقدار $\frac{1}{\sum X_i^2}$ معدومة.

لإجراء الإختبارات الإحصائية حول معنوية المعالم نحتاج إلى إيجاد مقدر تباينات أخطاء العينة، حيث من الفرضية الأساسية الثانية، لدينا تباينات الأخطاء متجانسة σ_u^2 لكن هذه القيمة هي معلمة مجتمع و غير معروفة. لدينا بواقي العينة لمقدرات الأخطاء معرفة في المعادلة (6.2) كما يلي:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = (Y_i - \bar{Y}) - (\hat{Y}_i - \bar{Y}) = y_i - \hat{y}_i$$

ولدينا كذلك:

$$y_i = \beta x_i + u_i - \bar{u}$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$$

لتصبح المعادلة (6.2) على الشكل:

$$\hat{u}_i = -(\hat{\beta} - \beta) x_i + (u_i - \bar{u}) \ldots\ldots (2.35)$$

إن تربيع المعادلة (35.2) و جمعها بالنسبة لكل i تعطي:

$$\sum \hat{u}_i^2 = (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum x_i^2 + \sum (u_i - \bar{u})^2 - 2(\hat{\beta} - \beta) \sum (u_i - \bar{u}) x_i$$

$$E\left(\sum \hat{u}_i^2\right) = E(A) \quad + \quad E(B) \quad - \quad 2E(C)$$

و لتحسب كل حد على إنفراد ثم نجمع النتائج:

$$\text{i) } E(A) = Var(\hat{\beta}) \cdot \sum x_i^2 = \sigma_u^2$$

$$\text{ii) } E(B) = E\left[\sum (u_i - \bar{u})^2\right] = (n-1)\sigma_u^2$$

$$\text{iii) } E(C) = E\left[(\hat{\beta} - \beta) \sum (u_i - \bar{u}) x_i\right] = E\left[\sum w_i u_i \sum x_i u_i\right]$$

$$= E\left[\sum w_i x_i u_i^2 + 2 \sum_{i<j} w_i x_j u_i u_j\right]$$

$$= \sigma_u^2 \cdot \sum w_i x_i = \sigma_u^2$$

و منه نجد:

$$E\left(\sum \hat{u}_i^2\right) = \sigma_u^2 + (n-1)\sigma_u^2 - 2\sigma_u^2 = (n-2)\sigma_u^2$$

$$\frac{E\left(\sum \hat{u}_i^2\right)}{(n-2)} = \sigma_u^2 \ldots\ldots\ldots (2.36)$$

ومنه يكون مقدر تباين الخطأ هو:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2} \qquad (2.36)$$

وهو مقدر المربعات الصغرى العادية لتباينات الأخطاء σ_u^2 غير المتحيز.

5-2 الإختبارات الإحصائية حول معنوية المعالم:

بمعرفة توزيع $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ ، يمكن تكوين مجالات ثقة و إجراء إختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم الإنحدار α، β على التوالي. تقترح مجالات الثقة مجالا للقيم التي يمكن أن تحتوي عليها معالم الإنحدار الحقيقية. مع كل مجال ثقة نضع مستوى إحصائي للمعنوية. فبوجود مستوى المعنوية. نشكل (نكون) هذه المجالات. حيث أن إحتمال إحتواء المجال المذكور على معلمة الإنحدار الحقيقية يكون واحدا(1) مطروحا منه مستوى المعنوية أي $(1-\lambda)$. تستعمل مجالات الثقة على الخصوص لإختبار الفرضيات الإحصائية حول معنوية معالم الإنحدار المقدرة.

و الإختبار الشائع جدا هو فرضية العدم H_0، وتقترح على العموم. فرضية العدم بأنه لا يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما. و نظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج. فإن فرضية العدم توضع عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك. فمثلا نأخذ دالة الإستهلاك(Y) المشروحة بدلالة الدخل(X) وننتظر من الدخل والإستهلاك أن يكونا مرتبطين إيجابيا. و بالتالي يكون β موجبا (لأن الميل الحدي للإستهلاك يكون $0<\beta<1$). و لإختبار صحة هذه العلاقة نضع:

$$H_0: \beta = 0$$

ونأمل رفض H_0 بإيجاد القيمة التقديرية $\hat{\beta}$ و التي تكون أكبر من الصفر. حتى نقبل النموذج. إن أحد أهدافنا الأولية في القياس الإقتصادي هو تحليل البيانات. والمقارنة الآنية لعدة نماذج تعتبر. عمليا. صعبة. فتختبر النماذج، عادة، بالتسلسل من أجل الوصول إلى تقييم كل نموذج مثلما وضع تحت الدراسة. هذا

يعني أن كل نموذج يجب أن يخصص في شكل قابل لإختبار الفرضيات ميدانيا. و إن كانت البيانات غير متسقة مع النموذج، يكون هذا الأخير مرفوضا و نقبل النموذج البديل. و لهذا فإن إختبار الفرضيات يناسب نموذجا واحدا. وتدل نتائج هذه الإختبارات إما على قبول النموذج أو على رفضه. إن إختيار مستوى المعنوية 5% يكون عادة عشوائيا، ويعتمد على نوع النهاية التي نريد الوصول إليها من النموذج.

إن مستوى المعنوية الضروري لقبول نموذج ما. يتغير واقعيا فيما بين الباحثين و كذلك بين أنواع النماذج المدروسة. فمثلا، إن النموذج المقدر بعدد كبير من الملاحظات يمكن أن يسمح لنا برفض فرضيات العدم H_0 لعدة معالم تمثل المتغيرات المستقلة. و لهذا يمكن أن نختار مستوى معنوية منخفضا حتى نجعل رفض فرضية العدم H_0 أكثر صعوبة. إن الإختبار الإحصائي المناسب لرفض فرضية العدم في مثالنا السابق هو عادة ما يعتمد على التوزيع t. فالتوزيع t مناسب لأنه في إختبارنا الإحصائي لمعنوية الميل الحدي للإستهلاك نحتاج إلى إستعمال مقدر تباين الخطأ $\hat{\sigma}^2_u$ عوضا عن القيمة الحقيقية للمعلمة σ^2_e. و قبل الوصول إلى ذلك نذكر ببعض المقاييس الإحصائية الضرورية و التي نحتاجها في تحليلنا الإحصائي لمقدرات المربعات الصغرى العادية.

2-5-1 إختبار جودة التوفيق بواسطة r^2:

في معادلة خط الإنحدار (5.2) تساعد البواقي على قياس مدى تمثيل المعادلة المفروضة (في النموذج) لمشاهدات العينة. حيث أن القيمة الكبيرة للبواقي تعني بأن التمثيل يكون غير جيد والقيمة الصغيرة لهذه البواقي تعني تمثيلا جيدا، للنموذج. إن المشكلة في إستعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع Y. و لهذا نقوم بتعريف تغير Y حول وسطها من الشكل (2.2) سابقا كما يلي:

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{Y}_i - \overline{Y} + \hat{u}_i........(2.37)$$

ويتربيع طرفي المعادلة (37.2) أعلاه و جمعها بالنسبة لكل i نجد:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum\hat{u}_i^2........(2.38)$$

إن المقدار $\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ هـو مجمـوع مربعـات الإنحرافـات الكلية في المتغير Y، أي Total Sum of Squares (TSS). أما المقـدار $\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$ فهو مجموع مربعات الإنحرافات المشروحة أو الموضحة Explained Sum of Squares (ESS). و يبقى الحد الأخير الذي هو مجموع مربعـات البواقـي Residual Sum of Squares (RSS). ومنه نعيد صياغة المعادلة (38.2) على الشكل:

$$TSS = ESS + RSS .... (2.39)$$

و بتقسيم كل الأطراف على الإنحرافات الكلية (TSS) نجد:

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$$

و منه نعرف $R^2 = r^2$ [4] معامل التحديد كما يلي:

$$R^2 = r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}........(2.40)$$

وهـو معـامل التحديـد الـذي يقيـس و يشـرح نسـبة الإنحرافـات الكليـة أو التغيرات التي تحـدث فـي المتغير التـابع Y، والمشـروحة بواسـطة تغيرات المتغير المستقل X_i.

و ما دام RSS محصور ما بين الصفر(قانون المربعات الصغرى) و القيمة TSS، فإن R^2 يكون معرفا وينتمي إلى المجال التالي: $0 \le R^2 \le 1$

4- بالنسبة لنموذج الإنحدار الخطي البسيط يكون معامل التحديد هو نفسه مربع معـامل الإرتباط ما بين متغيرين. أما بالنسبة لنموذج الإنحدار المتعدد يصبح هذا التعريف غير صحيح مثلما سنرى في ما بعد.

لما يكون RSS=0، هذا معناه أن R^2 يأخذ أكبر قيمة له وهي الواحد، أي عندما تقع كل نقاط الملاحظات (X_i, Y_i) على الخط المقدر $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$. ويكون التوفيق أحسن ما يمكن. أما لما ESS=0 (أي TSS=RSS)، فإن R^2 يأخذ أصغر (أسوء) قيمة له وهي الصفر (أي أنه لا توجد أية علاقة خطية مابين المتغير المستقل X_i والمتغير التابع Y_i) وهذا معناه أن X_i لا تشرح Y_i . و يمكن إيجاد العلاقة بين R^2 و$\hat{\beta}$ كمايلي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta} \sum x_i y_i}{\sum y_i^2} \ldots\ldots (2.41)$$

2-5-2 توزيعات المعاينة لمقدرات المربعات الصغرى وأخطائها المعيارية

إن إستعمالنا للفرضية الأساسية الخامسة في إستنباطنا الإحصائي لنموذج المربعات الصغرى يساعدنا على إيجاد توزيعات مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ و التي تحتوي على تباين الأخطاء σ_u^2 و هي القيمة غير المعروفة. و منه نقول بأنه لإشتقاق توزيعات المعاينة للمقدرتين $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$، نعوض σ_u^2 بمقدرها الموجود في المعادلة (37.2) حيث لدينا:

$$\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma_u^2} = \frac{(n-2)\ \hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{(n-2)}\ ^{(5)} \ldots\ldots (2.42)$$

و بحصولنا على الوسط و التباين لكل من المقدرتين $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$، نقول أنه بإستعمال المعادلتين (19.2)و(21.2) يصبح توزيع المقدر $\hat{\beta}$:

---

5 - إن (n-2) هي درجات الحرية حيث تعرف هذه الأخيرة على أنها عبارة عن الفرق مابين حجم العينة (n) وعدد لمعالم المطلوب تقديرها في النموذج.

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\right) ......(2.43)$$

و كذلك بإستعمال المعادلتين (17.2)و(20.2) نجد:

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{\sigma_u^2}{n} \sum x_i^2 \cdot \sum w_i^2\right) ......(2.44)$$

و لما لعرف قيمة $\hat{\sigma}_u^2$ غير المتحيزة، يمكننا تغيير تباينات المجتمع $var(\hat{\alpha})$ و $var(\hat{\beta})$ إلى تباينات العينة أو مقدرات التباينات. حيث نعرف هذه التباينات على الشكل:

$$v\hat{a}r(\hat{\alpha}) = \frac{\hat{\sigma}_u^2 \sum X_i^2 \cdot \sum w_i^2}{n} = \frac{\hat{\sigma}_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}$$

$$v\hat{a}r(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 \sum w_i^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum x_i^2}$$

وبناء على هذا التعريف تكون الإنحرافات المعيارية Standard deviations هي الجذور التربيعية لتباينات المقدرات. أما الأخطاء المعيارية Standard errors فهي الجذور التربيعية لمقدرات تباينات المقدرات أو هي مقدرات الإنحرافات المعيارية. أي:

$$S.E(\hat{\beta}) = \sqrt{v\hat{a}r(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\sigma}_u}{\sqrt{\sum x_i^2}} ......(2.45)$$

$$S.E(\hat{\alpha}) = \sqrt{v\hat{a}r(\hat{\alpha})} = \hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2}} ......(2.46)$$

ثم نقارن هذه الإنحرافات (الأخطاء المعيارية) مع القيم العددية لمقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$. فإذا كانت الأخطاء المعيارية أقل من نصف القيمة

العددية لمقدرات المعالم $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ مثلا $[S.E(\hat{\alpha}) < \frac{\hat{\alpha}}{2}]$، نستنتج بأن تلك المقدرة مقبولة إحصائيا. و هذا معناه رفض الفرضية القائلة بأن $\alpha = 0$ (أو $\beta = 0$)، أما إذا كانت قيمة الأخطاء المعيارية أكبر من نصف قيمة المقدرة، فنقول عن تلك المقدرة بأنها غير جيدة إحصائيا.

3-5-2- إختبار التوزيع t

إن تعويض قيمة σ_u^2 بمقدرها غير المتحيز ينقلنا من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع Student–t لأننا ننتقل من معلمة المجتمع σ_u^2 إلى مقدرة العينة $\hat{\sigma}_u^2$. وبناءا على تعريف $\sum \hat{u}_i^2$ في المعادلة (42.2)، تكون هذه الأخيرة موزعة إستقلاليا عن كل من المقدرتين $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$. حيث لدينا:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma_u^2 / \sum x_i^2\right) \quad \text{و} \quad \hat{\beta} - \beta \sim N\left(0, \sigma_u^2 / \sum x_i^2\right)$$

إن $\hat{\beta}$ مستقل عن $\hat{u}_i$ لأن $\operatorname{cov}(\hat{\beta}, \hat{u}_i) = 0$. ثم إن التوزيع الطبيعي المعياري هو:

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma_u / \sqrt{\sum x_i^2}} \sim N(0, 1)$$

ومع إستقلالية $\hat{\beta}$ عن $\chi^2_{(n-2)}$، وكذلك $\hat{\sigma}_u^2$ مستقلة عن σ_u^2 لدينا:

$$\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma_u^2} = \frac{RSS}{\sigma_u^2} = \frac{(n-2)\,\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$$

ومن تعريف التوزيع t في الفصل الأول حصلنا على:

$$Q = \frac{n(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{(n-2)}/(n-2)}} \sim t_{(n-2)}$$

إذن تصبح:

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_u/\sqrt{\sum x_i^2}} \Bigg/ \sqrt{\frac{RSS}{\sigma_u^2(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_u \cdot \sqrt{\sum x_i^2}} \Bigg/ \frac{\hat{\sigma}_u}{\sigma_u}$$

$$= \frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}_u/\sqrt{\sum x_i^2}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{S.E(\hat{\beta})} \sim t_{(n-2)} \qquad .....(2.47)$$

ونفس الشيء يمكن تطبيقه على المقدرة $\hat{\alpha}$ لنجد:

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{S.E(\hat{\alpha})} \sim t_{(n-2)} \qquad .....(2.48)$$

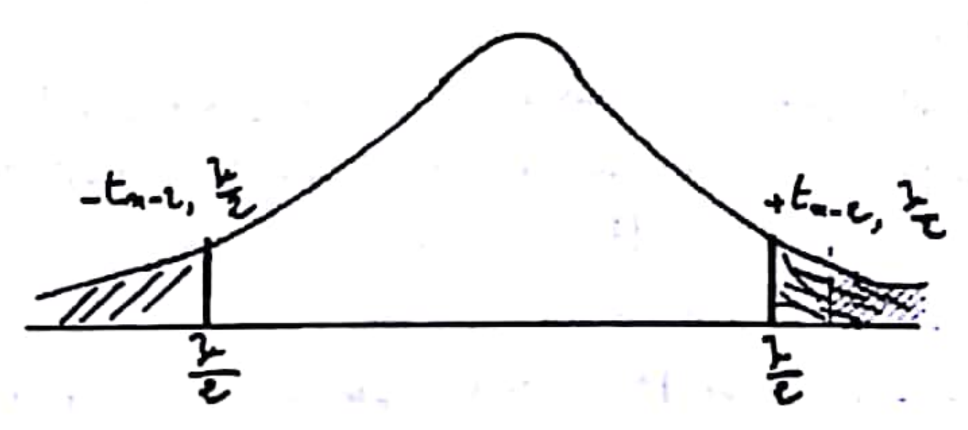
4-5-2 مجال الثقة لمعالم الإنحدار

إن رفض فرضية العدم ليس معناه أن المقدرة $\hat{\alpha}$ (أو $\hat{\beta}$) هي المقدرة الحقيقية لمعلمة المجتمع α (أو β). وإنما تعني بأن مقدرتنا حصلنا عليها من عينة مسحوبة من المجتمع الذي تكون معلمته تختلف عن الصفر. و لهذا نستعين بمجالات الثقة لأية معلمة. و لتكوين مجال الثقة من التوزيع t بالنسبة للمعلمة، مثلا، α نكتب القانون الخاص بهذه المعلمة:

$$t_{(n-2)} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{S.E(\hat{\alpha})}$$

وعند مستوى معنوية $\lambda\%$ يكـون مجـال الثقة $(1-\lambda)\%$. ونجد من جدول التوزيع t القيمـة المحسـوبة $\pm t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$. وهـذا معنـاه أن إحتمـال وجـود الإحصاءة t ما بين $\pm t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$ يكتب على الشكل:

$$pr\left[-t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{S.E(\hat{\alpha})} \leq +t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right]=1-\lambda$$



المنطقة الحرجة منطقة القبول المنطقة الحرجة

الشكل(5.2) – توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}$ ثنائي الطرف.

وإذا ضربنا (داخل الإحتمال) كل الأطراف بواسطة $S.E(\hat{\alpha})$ وأضفنا α لأطراف المتراجحة نجد:

$$pr\left[\hat{\alpha}-S.E(\hat{\alpha})\,t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq \alpha \leq \hat{\alpha}+S.E(\hat{\alpha})\,t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right]=1-\lambda$$

لنجد في الأخير مجال الثقة لـ α مثلا:

$$\hat{\alpha} - S.E(\hat{\alpha})\, t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \alpha \le \hat{\alpha} + S.E(\hat{\alpha})\, t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$$

$$C.I(\alpha) = \hat{\alpha} \pm S.E(\hat{\alpha})\, t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \quad .....(2.49)$$

أي أن:

$$\alpha \in \left[\hat{\alpha} - S.E(\hat{\alpha})\, t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} , \hat{\alpha} - S.E(\hat{\alpha})\, t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]$$

و كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن لأن الاخطاء المعيارية SE(.) تكون أصغر.

2-5-5 إختبار الفرضيات

قد يكون النموذج المبنى من طرفنا صحيحا أو غير صحيح و تثبت صحته من خلال إختباره. و يتم ذلك بواسطة فرض معلمة من معالم النموذج تساوي الصفر أو أي عدد آخر. و تسمى فرضية العدم(H_0). وما دامت العلاقة بين Y و X قائمة على أساس النموذج الخطي. فإن إنعدام هذه العلاقة يعني أن خط انحدار المجتمع هو عبارة عن خط أفقي أي $H_0 : \beta = 0$. وبما أن الافتراض H_0 خاضع للإختبار. فإنه لايكون بالضرورة صحيحا. الأمر الذي يتطلب منا وضع بديل H_1

أي: $H_1 : \beta \neq 0$. وفي حالة معرفة إشارة β مسبقا من النظرية الإقتصادية، فإن الإفتراض البديل يكون $H_0 : \beta > 0$. (أو $\beta < 0$) وإذا طلب منا اختبار الفرضية

فرضية العدم	$H_0 : \beta = 0$
ضد فرضية البديل	$H_1 : \beta \neq 0$

نكتب:

$$t_{n-2} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{S.E(\hat{\beta})} = t_c$$

وهي القيمة المحسوبة

و ما دمنا نختبر فرضية العدم فنكتب $\hat{\beta}/S.E(\hat{\beta})$ = t_{n-2} . ونقول

نرفض H_0 بمستوى معنوية $\lambda\%$ إذا كانت:

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{S.E(\hat{\beta})}\right| > t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$$

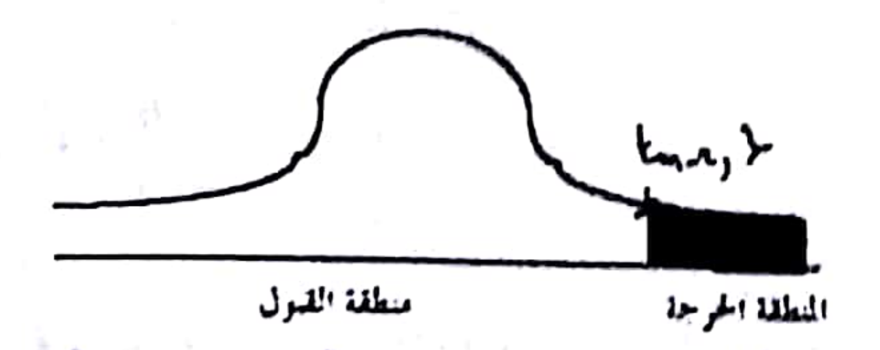
حيث أن $t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$ مأخوذة من جدول التوزيع t وتسمى بالقيمة المجدولة. ونقبل H_0 بمستوى $\lambda\%$ إذا كانت:

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{S.E(\hat{\beta})}\right| < t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$$

أما إذا كانت إشارة β معروفة مسبقا فإننا نكتب:

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{S.E(\hat{\beta})}\right| \geq t_{n-2,\lambda} \Rightarrow \quad \text{نقبل } H_0$$

ويكون الإختبار أحادي الطرف كما هو مبين بالشكل(6.2).



الشكل(6.2) - توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}$ أحادي الطرف

توجد عدة تساؤلات لدى باحثي القياس الإقتصادي في الإختبار الإحصائي الأفضل بين معامل التحديد R^2 (أو مربع معامل الإرتباط r^2) والأخطاء المعيارية للمقدرات $S.E(.)$. فأيهما أفضل؟ قيمة عالية لـ R^2 أم قيمة منخفضة للأخطاء المعيارية للمقدرات؟

على العموم، يكون الإختبار سهلا لما نحصل على قيمة عالية لـ R^2 وقيمة منخفضة للأخطاء المعيارية. لكن في الحياة العملية لبحوث القياس الإقتصادي نادرا ما يحدث ذلك. حيث في أغلب الأحيان نحصل على قيمة عالية لـ R^2. وفي نفس الوقت على قيم عالية للأخطاء المعيارية لبعض المقدرات. ويرى. في هذا السياق. بعض منظري القياس الإقتصادي أن تعطى أهمية أكثر لقيمة R^2 العالية (رغم ما يشوبه من عيوب[6]) ومن ثم يقبلون مقدرات المعالم غير مهتمين بعدم جدية المعنوية الإحصائية لبعض هذه المقدرات.

---

[6]- سنرى بالفصل الثالث أن هذا المقياس الإحصائي R^2 له كذلك عيوب.

ويتفق أغلب كتاب القياس الإقتصادي بأنه تعطى أهمية أكثر لـ R^2 لما يكون الهدف من النموذج، قيد الدراسة، هو إستعماله في التنبؤ المستقبلي Forecasting. بينما تعطى أهمية أكبر للأخطاء المعيارية لما يكون هدف الباحث من الدراسة هو التحليل وشرح الظاهرة الإقتصادية. ويفضل الحصول على قيمة عالية لـ R^2 و قيمة منخفضة للأخطاء المعيارية حتى يكون شرحنا أقرب إلى الواقع. حيث لما يحدث تعارض في هذين المقياسين الأساسيين، يجب على الباحث أن يكون حذرا في تفسيره للإنحدار، وقبوله لنتائج التقدير. وفي هذه الحالة تعطى الأولوية للمقاييس الإقتصادية المعروفة (المحددة) مسبقا (مثل حجم وإشارة المقدرات). لأنه بدون قبول هذه المقاييس الأخيرة لا يمكننا الإنتقال إلى المقاييس الإحصائية.

6-5-2 إختبار التوزيع F

إن إختبار معنوية (أثر) المتغير المستقل X_1 $(H_0: \beta=0)$ يمكن أن يكون في شكل توزيع F. حيث لدينا التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma_u / \sqrt{\sum x_1^2}} \sim N(0,1)$$

ومن تعريف المتغير χ^2 في الفصل الأول نجد:

$$\frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2}{\sigma_u^2 / \sum x_1^2} \sim \chi^2_{(1)}$$

و ما دام $\left(RSS/\sigma_u^2\right) \sim \chi^2_{n-2}$، ومستقل توزيعيا عن $\hat{\beta}$. فإنه بناءا على تعريف التوزيع F سابقا نجد:

$$\therefore \frac{\chi^2_{(1)}/1}{\chi^2_{n-2}/n-2} = \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2 \cdot \sum x_i^2}{\sum \hat{u}_i^2/(n-2)} = \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2 \cdot \sum x_i^2}{\hat{\sigma}_u^2} \sim F_{1,n-2} \ldots\ldots(2.50)$$

و إذا كانت الفرضية $H_0 : \beta = 0$ صحيحة ينتج أن:

$$F = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{\sum \hat{u}_i^2/(n-2)} = \frac{(n-2)\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{RSS} \sim F_{1,n-2} \ldots\ldots(2.51)$$

و إعتمادا على المعادلة (40.2) و(41.2) نجد:

$$F = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{RSS/(n-2)} = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)} \sim F_{1,n-2} \ldots\ldots(2.52)$$

والقول أننا نرفض $H_0 : \beta = 0$ بمستوى معنوية $\lambda\%$ إذا كانت:

$$F_{1,n-2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{RSS/(n-2)} > F_{\lambda,(1,n-2)}$$

حيث أن $F_{\lambda,(1,n-2)}$ هي القيمة المجدولة. و تؤخذ من جداول توزيـع F. و تقبل الفرضية H_0 إذا حدث العكس أي:

$$F_{1,n-2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{RSS/(n-2)} \le F_{\lambda,(1,n-2)}$$

و بالمقارنة مع التوزيع t نجد العلاقة التالية:

$$\left(\frac{\hat{\beta}\sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{RSS/(n-2)}}\right)^2 = \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_u/\sqrt{\sum x_i^2}}\right)^2 \sim \left[t_{n-2}\right]^2 \sim F_{1,n-2} \ldots\ldots(2.53)$$

و هما إختباران متطابقان(٦)

٦- تصلح هذه العلاقة (النتيجة) لما نختبر المعالم الفردية لنموذج الإنحدار فقط

و لإيجاد العلاقة الخاصة بالتوزيعين F، t مع معامل التحديد R^2 نعود للمعادلة (40.2) حيث نكتب:

$$ESS = R^2 . TSS = R^2 . \sum y_i^2$$

$$RSS = (1 - R^2) . TSS = (1 - R^2) . \sum y_i^2$$

و لنعوض ذلك بالمعادلة (52.2) فنجد:

$$F = \frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)} = \frac{R^2}{(1-R^2)} . (n-2) \sim F_{1, n-2} \; .....(2.54)$$

و نظرا للعلاقة الموجودة ما بين التوزيعين F و t بالمعادلة (53.2) يمكن كتابة:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{n-2} .....(2.55)$$

6-2 التقدير بطريقة المعقولية العظمى Maximum Likelihood Method

في تطبيقنا لطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، لم نكن بحاجة إلى إستعمال الفرضية الأساسية الخامسة، أو فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء العشوائية U_i. أما بالنسبة لطريقة المعقولية العظمى فتصبح هذه الأخيرة ضرورية، وبحضور هذه الفرضية يكون المتغير التابع Y_i موزعا طبيعيا كذلك، حيث من النموذج (4.2) لدينا:

$$Y_i \sim N(\alpha + \beta X_i, \sigma_u^2)$$

حيث نعرف مقدر المعقولية العظمى $\tilde{\beta}$ للمعلمة β كقيمة تعمم عينة الملاحظات المشاهدة $(Y_1, Y_2, ... Y_n)$. و على العموم، إذا كانت Y_i موزعة طبيعيا، كما هو مبين أعلاه، و كانت كل وحدة من وحدات Y_i مسحوبة إستقلاليا، فإن مقدر المعقولية العظمى يعظم العبارة التالية: $Pr(Y_1) . Pr(Y_2) ..... Pr(Y_n)$. حيث كل Pr تمثل إحتمالا متوافقا مع التوزيع

الطبيعي. و قبل تطبيق هذا التعريف مباشرة على نموذج الإنحدار الخطي البسيط هناك ملاحظتان:

1) إن مقدر المعقولية العظمى المسحوب هو دالة للعينة الخاصة بوحدات Y_i المختارة. حيث أن سحب عينة مختلفة أخرى سوف يعطينا مقدرا للمعقولية العظمى يختلف عن المقدر الأول.

2) إن العبارة $Pr(Y_1).Pr(Y_2).....Pr(Y_n)$ تشير إلى دالة المعقولية Likelihood function. و لا تعتمد دالة المعقولية فقط على قيم العينة. بل على مجموعة المعالم غير المعروفة في النموذج كذلك. و في تعريفنا لدالة المعقولية ننظر إلى المعالم غير المعروفة على أساس أنها تتغير، بينما تكون قيم Y_i مثبتة. و تكون هذه النظرة مقبولة، لأن إيجاد مقدر المعقولية العظمى، يحتوي على البحث في مقدرات المعالم البديلة للحصول على تلك المقدرات التي تمثل وتعمم العينة المعطاة في الدراسة. ولهذا السبب، نرى أنه من الضروري أن يكون مفهوم دالة المعقولية مختلفا عن مفهوم التوزيع الإحتمالي المجمع Joint probability Distribution حيث في التوزيع الإحتمالي المجمع تتغير قيم Y_i بينما تثبت قيم المعالم.

في النموذج الخطي البسيط يكون التوزيع الإحتمالي (أو إحتمال حدوث المشاهدة (i)) للمتغير التابع Y_i هي كما يلي:

$$Pr(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_u^2}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\right] \quad [8]..(2.56)$$

و تحت فرضية الإستقلال، يكون إحتمال حدوث كل المشاهدات Y_i مرة واحدة، أو دالة المعقولية (الكثافة الإحتمالية المجمعة لكل $(Y_1, Y_2, ... Y_n)$ هو الدالة:

[8] - يمكن أن تسمى المعادلة (56.2) بدالة الكثافة الإحتمالية.

$$L(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, \alpha, \beta, \sigma_u^2) = Pr(Y_1).Pr(Y_2)\ldots\ldots Pr(Y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\sigma_u^2)^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_u^2}\sum(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\right] \ldots (2.57)$$

و واضح من المعادلة (57.2) أعلاه، أنها دالة للمعالم غير المعروفة $\alpha, \beta, \sigma_u^2$ وكذلك للقيم $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ وهي دالة كثافة إحتمالية مجمعة. إن طريقة المعقولية العظمى تتطلب منا إختيار قيم المعالم $\alpha, \beta, \sigma_u^2$ بحيث تعظم المعادلة (57.2) أعلاه.

تسمى هذه الأخيرة بدالة المعقولية، ونرمز لها بالرمز $L(\alpha, \beta, \sigma_u^2)$، أو إحتمال مشاهدة كل ملاحظات العينة Y_i بمعرفة قيم المعالم المذكورة. إن أبسط إستعمال لهذه الطريقة (المعقولية العظمى) هو إدخال اللوغاريتم الطبيعي على دالة المعقولية، حيث أنها أصلا دالة نمطية Monotone. كما أن $\log L(\alpha, \beta, \sigma_u^2)$ سوف تصل إلى أعظم قيمة عند نفس النقطة التي تصلها دالة المعقولية. كما أن إدخال اللوغاريتم سوف يقضي على الحد الأسي Exponential term. وعند إدخال اللوغاريتم الطبيعي على المعادلة (57.2) نجد:

$$\log L(\alpha, \beta, \sigma_u^2) = \text{Log}L$$

$$= -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}\sum(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 \ldots (2.58)$$

إن تعظيم المعادلة (58.2) يتطابق مع تصغيرها وذلك لأن كل حدودها في الطرف الأيمن مسبوقة بإشارة سالبة. ومنه يكون تعظيم المعادلة المذكورة عن طريق إشتقاقها جزئيا بالنسبة للمعالم غير المعروفة $(\alpha, \beta, \sigma_u^2)$، ثم نساوي مشتقاتها الجزئية للصفر لنجد:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_u^2}\sum\left(Y_i - \alpha - \beta X_i\right) = 0....(2.59)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_u^2}\sum\left[\left(Y_i - \alpha - \beta X_i\right)X_i\right] = 0....(2.60)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_u^2} = \frac{-n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma_u^4}\sum\left(Y_i - \alpha - \beta X_i\right)^2 = 0....(2.61)$$

نحصل على مقدرات المعقولية العظمى $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\sigma}_u^2$ للمعالم $\alpha, \beta, \sigma_u^2$ على التوالي. من المعادلات الثلاث أعلاه على الشكل:

$$\tilde{\alpha} = \bar{Y} - \tilde{\beta}\bar{X}.....(2.62)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}....(2.63)$$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{\sum\left(Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}X_i\right)^2}{n}.....(2.64)$$

كما أنه يمكننا الحصول على المعادلتين التاليتين:

$$\sum Y_i = n\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\sum X_i....(2.65)$$

$$\sum X_i Y_i = \tilde{\alpha}\sum X_i + \tilde{\beta}\sum X_i^2....(2.66)$$

إن مقارنة بسيطة ما بين المعادلتين(65.2)،(66.2) والمعادلتين الطبيعتين للمربعات الصغرى(8.2)،(10.2) تجعلنا نستنتج بأن مقدرتي المربعات الصغرى العادية ($\hat{\alpha}$،$\hat{\beta}$) متطابقتين مع مقدرتي المعقولية العظمى ($\tilde{\alpha}$،$\tilde{\beta}$) على التوالي.

أما المعادلة(64.2) فتعطي مقدر المعقولية العظمى لتباينات الأخطاء وهي:

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}\sum\left(Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}X_i\right)^2 = \frac{RSS}{n}.....(2.67)$$

لكن قيمة هذه المقدرة $\tilde{\sigma}_u^2$ تختلف عن قيمة مقدرة المربعات الصغرى العادية $\hat{\sigma}_u^2$.

حيث أن الأولى متحيزة (لكنها تقاربيا متسقة). أما الثانية فهي غير متحيزة حيث أن:

$$E(\tilde{\sigma}_u^2) = E\left(\frac{RSS}{n}\right) = \frac{1}{n}E(RSS)$$

و باستعمال المعادلة (36.2) نجد:

$$E(\tilde{\sigma}_u^2) = \frac{1}{n}(n-2)\sigma_u^2 = \sigma_u^2 - \frac{2}{n}\sigma_u^2 \ldots\ldots (2.68)$$

وهي قيمة متحيزة لكن لما $n \rightarrow \infty$ فتصبح:

$$\lim_{n\to\infty} E(\tilde{\sigma}_u^2) = \sigma_u^2$$

2-7 التنبؤ Prediction

إن أحد الأدوار الرئيسية للقياس الإقتصادي هو التنبؤ بتأثر أحد المتغيرات من طرف المتغيرات الأخرى. فمثلا، نفرض أننا نريد إختبار أثر تخفيض الضريبة على مستوى الإنفاق الإستهلاكي للعائلات. أو أثر زيادة الإنفاق الحكومي على ذلك. فإذا عرفنا بأي مقدار يمكن للضريبة البديلة أن تزيد من الدخل المتاح. نستطيع إستعمال دالة الإستهلاك المقدرة للتنبؤ بأثار الضريبة المخفضة على الإستهلاك. لنأخذ نموذجنا البسيط ولنفرض أننا نعرف قيمة X في دورة التنبؤ Forecasting period. ونرمز لها بالرمز X_f. فإذا فرضنا أن البناء الهيكلي للمعادلة لايتغير في المستقبل، تكون قيمة المتغير التابع Y في هذه الفترة f كما يلي:

$$Y_f = \alpha + \beta X_f + u_f \ldots (2.69)$$

عندما نستعمل علاقة ما للتنبؤ بالقيمة Y_f. هناك مصدران لعدم الوضوح والدقة في تنبؤاتنا وهما:

1) لا نعرف المعلمتين α،β، و بالتالي يجب الإعتماد على مقدرتي العينة $\hat{\alpha}$،$\hat{\beta}$ لكي تقدر القيمة Y_r. إن هذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_r. أي:

$$E(Y_t) = \alpha + \beta X_t$$

$$E(Y_r / X_r) = \alpha + \beta X_r \ldots\ldots (2.70)$$

2) بالإضافة إلى أن الخطأ u_r هو متغير عشوائي غير مشاهد. ولهذا، حتى ولو عرفنا قيمتي α،β و بالتالي أستطعنا حساب $E(Y_r / X_r)$. نبقى غير قادرين على التنبؤ بقيمة Y_r تماما بسبب الخطأ u_r.

إذن نأخذ، أولا، مقدرا للمقدار $E(Y_r / X_r)$. ونستعين به في التنبؤ بقيمة Y_r نفسها، ثم نضع مجالا للتنبؤ بـ Y_r. ومادام:

$$E(Y_r / X_r) = \alpha + \beta X_r$$

فيكون المقدر الطبيعي لها على الشكل:

$$\hat{Y}_r = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_r \ldots . (2.71)$$

ويمكن أن نبين بأن هذا المقدر هو مقدر غير متحيز لـ $E(Y_r / X_r)$. وأنه عبر المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى يعتبر هذا الأخير أحسنها (أي أصغر تباين). ويعرف باسم أفضل تنبؤ خطي غير متحيز أي Best Linear Unbiased Predictor (BLUP). وتأتي هذه الخاصية من كون $\hat{\alpha}$،$\hat{\beta}$ لهما خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE. وإذا فرضنا أن X مستقلة. يكون تباين $\hat{Y}_r$ على الشكل:

$$\text{var}(\hat{Y}_r) = \text{var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_r) = \text{var}(\hat{\alpha}) + X_r^2 \text{var}(\hat{\beta}) + 2X_r \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

وباستعمال المعادلات (20.2)، (21.2) و(22.2) نجد أن:

$$\text{var}(\hat{Y}_r) = \sigma_u^2 \sum w_i^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n} + \left(X_r - \overline{X}\right)^2 \right] \ldots . (2.72)$$

كما يمكن كتابتها على الشكل:

$$var(\hat{Y}_f) = \sigma_u^2\left[\frac{1}{n} + \left(X_f - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum w_i^2\right] \ldots (2.73)$$

و نلاحظ أن تباين مقدار التنبؤ ينخفض كلما:

1) إنخفضت القيمة $\left(X_f - \bar{X}\right)^2$ أي كلما إقتربت X_f من وسط العينة $\bar{X}$.

2) إزدادت n أي حجم العينة يزداد.

3) إزدادت القيمة $\sum x_i^2$ ، أي كلما إنخفضت القيمة $\sum w_i^2$.

لنأخذ الآن هذا المقدر لـ $E\left(Y_f / X_f\right)$ كقيمة متنبأ بها Predicted Value بواسطة تقدير وسطها. إن مقدار الخطأ الداخل في هذا التنبؤ معطى بالعبارة:

$$\hat{u}_f = Y_f - \hat{Y}_f \ldots\ldots (2.74)$$

و نسميه مقدار خطأ التنبؤ prediction error أو Forecast error ثم نلاحظ أن:

$$E(\hat{u}_f) = E(Y_f - \hat{Y}_f) = 0 \ldots\ldots (2.75)$$

و يصبح تباين خطأ التنبؤ هو:

$$var(\hat{u}_f) = var(Y_f - \hat{Y}_f) = var(Y_f) + var(\hat{Y}_f) \ldots\ldots (2.76)$$

إن قيمة Y_f تعتمد مباشرة على u_f، بينما تعتمد $\hat{Y}_f$ على أخطاء العينة $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ بواسطة المقدرتين $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ وبالتالي يكون (9) $cov\left(Y_f, \hat{Y}_f\right) = 0$

ونلاحظ أنه إذا كانت X مستقلة فإن $var(Y_f) = var(u_f) = \sigma_u^2$

كما وجدنا من قبل. ولدينا $var(\hat{Y}_f)$ بالمعادلة (73.2) لنجد:

$$var(\hat{u}_f) = \sigma_u^2\left[1 + \frac{1}{n} + \left(X_f - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum w_i^2\right]$$

9-

$$cov\left(Y_f, \hat{Y}_f\right) = E\left[\left(Y_f \quad E(Y_f)\right)\left(\hat{Y}_f \quad E(\hat{Y}_f)\right)\right]$$
$$= E\left[u_f\left((\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)\right)X_f\right]$$
$$= E\left[u_f\left(\sum\left(\tfrac{1}{n} - \bar{X}x_i\right)u_i\right)\right] - E\left[X_f u_f - \sum w_i u_i\right] = 0$$

و لنعرف $var(\hat{u}_r) = \sigma^2_{ur}$ لنجد أن:

$$\sigma^2_{ur} = \sigma^2_u \left[1 + \frac{1}{n} + \left(X_r - \overline{X}\right)^2 \cdot \sum w_i^2 \right] \ldots (2.77)$$

و منه فإن المقدر غير المتحيز لتباين خطأ التنبؤ $v\hat{a}r(\hat{u}_r)$ هو:

$$\hat{\sigma}^2_{ur} = \hat{\sigma}^2_u \left[1 + \frac{1}{n} + \left(X_r - \overline{X}\right)^2 \cdot \sum w_i^2 \right] \ldots (2.78)$$

و نلاحظ أنه كلما كبر حجم العينة فإن $\hat{\sigma}^2_{ur}$ تقترب من $\hat{\sigma}^2_u$ أي

$$\lim_{n \to \infty} (\hat{\sigma}^2_{ur}) = \hat{\sigma}^2_u$$

و لهذا فعندما يكون حجم العينة كبيرا يمكن إستعمال $\hat{\sigma}_u$ كتقريب لـ $\hat{\sigma}_{ur}$.

نأمل الآن في إيجاد مقياس لتحديد دقة هذا التنبؤ لـ Y_r. وللقيام بذلك نفرض توزيعا إحتماليا معينا للإضطرابات العشوائية، وهو التوزيع الطبيعي. ثم مادام u_r موزع طبيعيا وكذلك Y_r. كما أن أخطاء العينة $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ موزعة طبيعيا، وكذلك $\hat{\beta}$،$\hat{\alpha}$ فإن $\hat{Y}_r$ تكون موزعة طبيعيا أيضا. ولهذا فإن خطأ التنبؤ $\hat{u}_r = Y_r - \hat{Y}_r$ يكون متغيرا عشوائيا موزعا توزيعا طبيعيا بوسط مساو للصفر وتباين هو σ^2_{ur}. أما مقدر هذا التباين فهو $\hat{\sigma}^2_{ur}$.

و منه فإن:

$$Z = \frac{\hat{u}_r}{\sigma_{ur}} \sim N(0,1)$$

كما أن σ^2_{ur} تعتمد على القيمة غير المعروفة σ^2_u كما في المعادلة(77.2). فعمليا نعوض بمقدرها $\hat{\sigma}^2_{ur}$ لتعطي المتغير العشوائي للتوزيع t كمايلي:

$$\frac{\hat{u}_r}{\hat{\sigma}_{ur}} = \frac{Y_r - \hat{Y}_r}{\hat{\sigma}_{ur}} \sim t_{n-2}$$

إذا كانت $t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$ هي القيمة الحرجة (من الجدول) لتوزيع t بحيث تحقق:

$$pr\left[t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq \frac{Y_r - \hat{Y}_r}{\hat{\sigma}_{ur}} \leq t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right] = 1-\lambda$$

فإن مجال الثقة للتنبؤ يكون:

$$\hat{Y}_r - \hat{\sigma}_u \cdot t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \leq Y_r \leq \hat{Y}_r + \hat{\sigma}_u \cdot t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}$$

$$Y_r \in \left[\hat{Y}_r - \hat{\sigma}_u \cdot t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}, \hat{Y}_r + \hat{\sigma}_u \cdot t_{n-2,\frac{\lambda}{2}}\right]$$

$$C.I(Y_r) = \hat{Y}_r \pm \hat{\sigma}_u \cdot t_{n-2,\frac{\lambda}{2}} \quad ....(2.79)$$

8-2 أخطاء في المتغيرات:

تكون المتغيرات الإقتصادية في الواقع العملي مقاسة بطرق ليست دائما صحيحة بالتمام. فهناك نسبة من الخطأ موجودة أثناء قياس المتغيرات أو جمع البيانات إلى آخره. فمثلا إذا قمنا بإجراء إستقراء أو إستجواب بعض الأفراد حول ظاهرة إقتصادية ما، أو تصرف إجتماعي معين، لا ننتظر أن تكون كل إجاباتهم صحيحة و هذا لإختلاف طبيعة الأفراد. وهناك نوعان من الأخطاء في قياس المتغيرات:

1) أخطاء القياس المتعلقة بالمتغير المستقل:

لنبقى دائما مع نموذجنا الخطي البسيط فإذا أحتوت الملاحظات X_i على أخطاء في شكل X_i^*، وإذا كانت هذه الأخطاء عشوائية تصبح X_i^* كمايلي:

$$X_i^* = X_i + W_i \Rightarrow X_i = X_i^* - W_i \ldots\ldots\ldots(2.80)$$

حيث أن W_i تمثل الخطأ الناتج عن قياس القيمة X_i. فإذا كانت W_i تتحقق عنها الفرضيات الأساسية للنموذج (4.2)، ومستقلة عن u_i و X_i، يمكن كتابة النموذج البسيط على الشكل:

$$Y_i = \alpha + \beta\left(X_i^* - W_i\right) + u_i$$

و تصبح المعادلة المطلوب تقديرها هي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i^* + u_i^* \ldots\ldots\ldots(2.81)$$

حيث:

$$u_i^* = u_i - \beta W_i$$

ومنه نلاحظ أن الخطأ الجديد u_i^* في هذه المعادلة ليس مستقلا عن المتغير المستقل X_i^* أي:

$$E\left(X_i^* u_i^*\right) = E\left(X_i + W_i\right)\left(u_i - \beta W_i\right)$$

و إذا فرضنا أن $E\left(W_i^2\right) = \sigma_w^2$ فإن:

$$E\left(X_i^* u_i^*\right) = -\beta\sigma_w^2 \ldots\ldots\ldots(2.82)$$

و هي قيمة تختلف عن الصفر. وبالتالي فإن المربعات الصغرى للمقدر $\hat{\beta}$، والمأخوذة من المعادلة الجديدة (81.2) تصبح متحيزة وغير متسقة. ويمكن إستعمال

طريقة المتغيرات الأدواتية Instrumental Variables للحصول على مقدرات متسقة.
ولكن هذه الطريقة غير مطلوبة في هذه المرحلة من التحليل (سنوضحها بالتفصيل في الفصل الخامس). في هذه المرحلة نستعمل طريقة بديلة للحصول على مقدرات تقريبية للقيمة $\hat{\beta}$. فإذا اعتبرنا نهاية إحتمال $\hat{\beta}$ من المعادلة المقدرة والتي هي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i^* \ldots\ldots\ldots (2.83)$$

فإننا نجد:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum\left(X_i^* - \bar{X}\right)u_i^*}{\sum\left(X_i^* - \bar{X}\right)^2}$$

و بالتعويض عن: $X_i^* = X_i + W_i$ وعن $u_i^* = u_i - \beta W_i$ نجد:

$$\hat{\beta} - \beta = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)u_i + \sum W_i u_i - \beta\sum\left(X_i - \bar{X}\right)W_i - \beta\sum W_i^2}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + 2\sum\left(X_i - \bar{X}\right)W_i + \sum W_i^2} \ldots\ldots (2.84)$$

ثم نقسم البسط والمقام على حجم العينة n، ونأخذ نهاية الإحتمال لنجد:

$$\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta - \beta\sigma_w^2/(\sigma_x^2 \pm \sigma_w^2) = \frac{\beta}{1 + \sigma_w^2/\sigma_x^2} < \beta$$

أي أن:

$$\text{plim}(\hat{\beta} - \beta) < 0$$

ومنه، فإنه من أجل العينات الكبيرة، تعطي المربعات الصغرى للمقدر $\hat{\beta}$ مقدرا ناقصا لـ β Underestimate و ذلك إذا كان β موجبا.

لنعتبر الأن المربعات الصغرى لإنحدار X^* في Y أي:

$$X_i^* = \gamma_0 + \gamma Y_i + u_i \ldots\ldots (2.85)$$

و تكون المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{X}_i^* = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma} Y_i$$

لتكون المقدرة $\hat{\gamma}$ على الشكل:

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)X_i^*}{\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

وبالتعويض عن $Y_i - \bar{Y} = \beta\left(X_i - \bar{X}\right) + \left(u_i - \bar{u}\right)$.

وعن $X_i^* = X_i + W_i$ نجد:

$$\hat{\gamma} = \frac{\beta\sum(X_i - \bar{X})X_i + \sum X_i(u_i - \bar{u}) + \beta\sum(X_i - \bar{X})W_i + \sum(u_i - \bar{u})W_i}{\beta^2\sum(X_i - \bar{X})^2 + 2\beta\sum(X_i - \bar{X})(u_i - \bar{u}) + \sum(u_i - \bar{u})^2} \quad ....(2.86)$$

ثم كذلك نقسم البسط والمقام على حجم العينة n ونأخذ نهاية الإحتمال لنجد:

$$\text{plim}(\hat{\gamma}) = \beta\sigma_x^2 / \left(\beta^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right)$$

وإذا أخذنا معكوس هذه المعلمة كمقدر لأثر X في Y نجد:

$$\text{plim}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}}\right) = \beta\left[1 + \frac{\sigma_u^2}{\beta^2\sigma_x^2}\right] > \beta$$

إذا و فقط إذا كانت $\beta > 0$.

وبالتالي بالنسبة للعينات الكبيرة تعطى $\frac{1}{\hat{\gamma}}$ مقدرا زائدا لـ β Overestimate وذلك إذا كان β موجبا. إذا كان β سالبا فإن كل النتائج المتوصل إليها تصبح بالعكس.

2) أخطاء القياس في المتغير التابع

لنعتبر ثانية نفس النموذج الكلاسيكي البسيط. ثم نفرض بأن ملاحظات المتغير التابع تحتوي على أخطاء. ونشاهد عمليا Y_i^* عوضا عن Y_i. فإذا كانت هذه الأخطاء عشوائية وعلى الشكل:

$$Y_i^* = Y_i + v_i$$

حيث تمثل v_i الخطأ الناتج عن قياس قيمة الملاحظة Y_i. وإذا كانت v_i تنطبق عليها الفرضيات الأساسية للنموذج البسيط، ومستقلة عن u_i، X_i. يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$Y_i^* - v_i = Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

و تصبح المعادلة المطلوب تقديرها هي:

$$Y_i^* = \alpha + \beta X_i + u_i^* \ldots.(2.87)$$

$$u_i^* = v_i + u_i$$

أما المعادلة التقديرية الجديدة فهي:

$$\hat{Y}_i^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \ldots.(2.88)$$

حيث أن:

$$E(u_i^*) = E(v_i + u_i) = 0$$

$$E(u_i^* X_i) = 0$$

ومنه فإن u_i^* له نفس خصائص u_i ومستقل عن X_i. وبالتالي فإن المربعات الصغرى العادية للمقدر $\hat{\beta}$ تكون غير متحيزة ومتسقة. ويمكن كذلك إجراء إختبارات التوزيع t. حيث يصبح المقدر $\hat{\beta}$ على الشكل:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum(X_i - \bar{X})u_i^*}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \beta + \frac{\sum(X_i - \bar{X})u_i}{\sum x_i^2} + \frac{\sum(X_i - \bar{X})v_i}{\sum x_i^2}$$

و إذا أدخلنا التوقع الرياضي ينتج أن مقدر المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ يكون غير متحيز $E(\hat{\beta}) = \beta$. كما أنه إذا كان حجم العينة n كبيرا. تكون نهاية الإحتمال $p\lim(\hat{\beta}) = \beta$. إذن نستنتج بأن وجود الأخطاء في قياس المتغير

التابع لا يؤثر في خاصية عدم التحيز لمقدرات المربعات الصغرى، شريطة أن تكون هذه الأخطاء عشوائية ولا تخالف الفرضيات الأساسية للنموذج.

9-2 مثـال 1.2:

لنأخذ مثالا عن دالة الإستهلاك العائلي في الجزائر خلال الفترة(1967-1989)([10]). حيث أن Y تمثل حجم الإستهلاك الفردي السنوي بالأسعار الحقيقية([11]) (بآلاف الدينارات)، X حجم الدخل الفردي السنوي بالأسعار الحقيقية كذلك.

إن تطبيق فرضية الدخل الدائم لكينز، أين يكون الإنفاق الجاري دالة للدخل الشخصي الجاري على بيانات مأخوذة من الديوان الوطني للإحصائيات وإستعمال قانون المربعات الصغرى العادية يعطي:

$$\hat{Y}_t = -343,15 + 0,96X_t$$

$$S.E \quad (140,5) \quad (0,032)$$

$$R^2 = 0,976 \qquad \overline{R^2} = 0,975 \qquad \hat{\sigma}_u = 144,15$$

$$D-W = 1,3 \qquad F_{(1,21)} = 883,5 \qquad RSS = 436351,1 \qquad n = 23$$

10- دراسة ميدانية قام بها الباحثون د./ أ.سواماس، د./ ب. العباس، السيد ص. لومي سنة 1990 لحساب مركز البحوث في الإقتصاد التطبيقي والتنمية CREAD.

11- سنة الأساس 100-1982

وإذا أردنا تقييم النموذج (أو معادلة الإستهلاك) أعلاه، نقول أنه رغم الإشارة السالبة لحد الكفاف، فإن المعادلة الكينزية تعطي نتائج إيجابية. حيث أن الميل الحدي للإستهلاك هو 0,96. وهذا لا يتعارض مع مبادئ النظرية الإقتصادية ويعني أن 96 % من معدل دخل الفرد الجزائري يذهب للإنفاق على الإستهلاك خلال فترة الدراسة. أي أن زيادة وحدة واحدة في الدخل تؤدي إلى زيادة الإستهلاك بـ 0,96 وحدة والباقي (0,04) يذهب للإدخار.

وإذا إنتقلنا إلى الإختبارات الإحصائية (التقييم الإحصائي للمقدرات) نجد أن مقياس معامل التحديد R^2 يبين لنا بأن 97 % من تغيرات الإستهلاك مشروحة بواسطة تغيرات الدخل، أما الباقي 3 % فهي مشروحة بواسطة عوامل أخرى لا نعرفها (مثل الذوق، العادات والتقاليد وغيرها)، وهذا يعني أن الدخل X_i يشرح دالة الإستهلاك بصورة جيدة.

أما بالنسبة للأخطاء المعيارية SE(.)، فنلاحظ أن المقدرتين مقبولتين إحصائيا، حيث أن نصف المقدرة أكبر من هذه الأخطاء المعيارية كما أشرنا لذلك من قبل، وإذا وضعنا الفرضية:

$$H_0 : \beta = 0 \quad v_s : H_A : \beta \neq 0$$

أو

$$H_0 : \alpha = 0 \quad v_s : H_A : \alpha \neq 0$$

فإننا نجد:

$$t_{n-2} = t_{21} = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})} = 29,723 > t_{21,\frac{\lambda}{2}} \; (^{12})$$

$$F_{(1,21)} = \frac{R^2}{1-R^2}(21) = 883,5 = (29,723)^2 > F_{(1,21),5\%}$$

12- $t_{21,\frac{\lambda}{2}}$ هي قيمة مأخوذة من الجدول حيث $\lambda = 5\%$. ثم إن: $t_{21,0.025} = 2,080$ ، $F_{(1,21),0.05} = 4,32$

ومنه نرفض H_0 ونقبل H_A البديلة والقائلة بإختلاف الميل الحدي للإستهلاك عن الصفر. و يمكن للقارئ أن يتأكد من نفس الشيء بالنسبة لـ $\hat{\alpha}$. أما مجال الثقة للمعلمة β فهو:

$$0,89344 \leq \beta \leq 1,02656$$

ومنه نلاحظ أن β ينتمي إلى مجال ثقة محدود وضيق وهذا دلالة على المعنوية الجيدة للمقدرة $\hat{\beta}$. ومنه نقول بناءا على المعطيات المتوفرة لدينا يكون النموذج مقبولا إقتصاديا وإحصائيا.

المشاهدة	الإستهلاك Y_t	الدخل X_t	الدخل من الأجور	الدخل من الممتلكات
1967	2234,547	2797,455	1333,028	743,6796
1968	2424,721	2905,423	1447,984	812,5031
1969	2449,642	2969,562	1520,663	1342,990
1970	2542,507	3187,054	1596,318	1177,394
1971	2511,127	3028,087	1675,338	1133,064
1972	2791,191	3176,691	1867,826	1169,603
1973	2719,716	3198,059	1837,917	1143,927
1974	3235,041	3820,519	2145,921	1170,528
1975	3493,188	3902,434	2377,555	1490,033
1976	3634,591	3929,591	2484,995	1340,302
1977	3867,699	4088,956	2605,213	1393,627
1978	4157,397	4441,601	3020,252	1444,769
1979	4129,261	4697,174	3385,728	1579,233
1980	4411,876	5226,668	3732,690	1633,334
1981	4655,557	5149,393	3632,150	1639,934
1982	4717,369	5319,635	3814,171	1636,702
1983	4675,372	5354,752	3997,013	1570,255
1984	4953,150	5342,200	3906,416	1540,794
1985	4843,626	5429,488	3781,727	1558,407
1986	4674,287	5302,546	3805,682	1551,420
1987	4255,491	4924,375	3608,541	1647,102
1988	4164,950	4768,605	غ م	1829,415
1989	4410,601	4746,628	غ م	1832,855

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات - سنة الأساس 100-1982

- جدول إحصائي-

التمرين الأول:

ليكن النموذج الخطي البسيط والمزود بالفرضيات الأساسية:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

1) بين صحة العبارات التالية:

$$i)\ RSS = TSS - \hat{\beta}\sum x_i^2$$

$$ii)\ \beta = 0 \Rightarrow R^2 = 0$$

$$iii)\ RSS = (1 - R^2).TSS$$

$$iv)\ t_{n-2} = r \Big/ \left(\sqrt{1 - r^2} \big/ \sqrt{n - 2}\right)$$

$$v)\ \sum \hat{u}_i \hat{Y}_i = 0$$

2) إذا حذفنا الحد الثابت في المعادلة أعلاه، أوجد المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى ومقدر الميل. وأحسب تباينه.

3) يعطى المقدر التالي لـ β وهو $b = \sum_{i=1}^{n} Y_i / a_i : \forall a_i \in R^*$

وكذلك مقدر α كما يلي: $a = \sum_{i=1}^{n} W_i Y_i : \forall W_i \in R^*$

a) تحت أية ظروف أو شروط تكون a ,b مقدرتي α, β على التوالي، غير المتحيزين ؟

b) لما تكون a ,b مقدرتي β، α على التوالي غير المتحيزتين، أوجد تباينيهما بدلالة a_i، W_i. ثم أوجد أصغر قيمة لتباينيهما وقارنهما مع تبايني $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ على التوالي. حيث $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ هما مقدرتي المربعات الصغرى.

c) بين الشروط التي تجعل $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ مقدرتين كفؤتين؟

4) إذا كانت $E(u_i) = k$، حيث k ثابت، فهل يكون مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ متحيزا. وما هو تباينه؟ وهل يحافظ على خاصية الكفاءة؟

5) لنفرض أن العلاقة الحقيقية بين المتغيرين Y و X هي على الشكل:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

$$E(u_i) = 0$$

و إذا كان هناك باحث يريد تقدير المعلمة β بواسطة تحدير Y في X بدون الحد الثابت $(\alpha = 0)$.

a) بين بأن المقدر $\hat{\beta}$ سوف يكون متحيزا ثم إشتق العبارة الجبرية لهذا التحيز.

b) تحت أية ظروف يكون هذا التحيز مساويا للصفر؟

التمرين الثاني:

في دراسة لإيجاد العلاقة ما بين مبيعات السيارات ومستوى الأجور والمرتبات الإجمالية في إقتصاد بلد ما، نتوقع بأن المستوى العالي للأجور والمرتبات سيؤدي إلى زيادة المبيعات. وكانت البيانات المتوفرة لدينا شهرية، إبتداءا من جانفي 1963 إلى أفريل 1970. وإفترضنا النموذج الإقتصادي التالي:

$$S_i = \alpha + \beta W_i + u_i \qquad , \quad i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

حيث أن S_i هي مبيعات السيارات شهريا، W_i مرتبات الموظفين الشهرية. وعند تطبيق قانون المربعات الصغرى حصلنا على:

$$\hat{S}_i = 1767,61 + 7,48\, W_i$$

$$SE \quad (238,87) \quad (18,5)$$

$$R^2 = 0,80$$

a) إشرح المعنى الإقتصادي والإحصائي لقيمتي $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$.

b) أوجـــد قيمتـــي $\hat{Var}(\hat{\alpha})$ ، $\hat{Var}(\hat{\beta})$. واختـــبر صحـــة الفرضيـــة $H_0:\beta=0$. و أوجد مجال ثقة β عند مستوى معلوية $\lambda = 5\%$.

التمرين الثالث:

في عينة تتكون من 10 ملاحظات سنوية. هناك باحث يريد تقدير دالة الطلب على أجهزة التلفزيون القديمـة (المستعملة). لقد إستقرت فكرته على بناء نموذجين مختلفين يمثل الأول دالـة الطلب الخطي على هذه الأجهزة. بينما يمثل الثاني دالة مرونة الطلب الثابتة وكانت نتائج هذا الباحث على الشكل التالي:

- دالة الطلب الخطي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$\hat{Y}_i = 1704 - 22,3X_i \quad : \quad R^2 = 0,76$$

$$SE \qquad (4,4)$$

- دالة مرونة الطلب الثابتة:

$$Y_i = \beta_1 \cdot X_i^{\beta_2} \cdot u_i$$

$$\log \hat{Y}_i = 9,12057 \quad 0,69 \log X_i \quad : \quad R^2 = 0,99$$

$$SE \qquad (0,02)$$

a) أحسب مرونة السعر لكل دالة.

b) أحسب قيمة الإحصاءة t لأموال الإنحدار. وعلق على نتائجك.

c) بإستعمال معلوماتك من النظريـة الإقتصاديـة والإحصائيـة.مـاهي الدالـة المفضلة لديك؟

d) تنبأ بالطلب على أجهزة التلفزيون المستعملة لما يكون السعر هو 8 وحدات:

Y	543	580	618	695	724	812	887	991	1186	1940
X	61	54	50	43	38	36	28	23	19	10

التمرين الرابع:

ليكن النموذج الخطي البسيط والمقدر:

$$\hat{Y}_i = 0,5 + 0,1X_i \qquad n = 10 \;,\; \lambda = 5\%$$

$$SE \quad (0,01) \quad (0,05)$$

a) نريد معرفة ما إذا كان المتغير X_i يفسر حقيقة النموذج

b) أوجد حيز الثقة للمعلمة β. والتوقع النقطي لما $X_t = 10$.

التمرين الخامس:

لتكن دالة الطلب على الأحذية التي تحمل علامـة SONIPEC هـي كمـايلي:

$$Q_i = \alpha + \beta P_i + u_i \quad : \quad i = 1,2.....n$$

Q: الكمية، P: السعر

a) إشرح المعالم α، β وحدد إشارتهما مسبقا.

b) ضع قائمة بأسماء المتغيرات المهمة والتي تظن أنها محذوفة من الدالة أعلاه.

التمرين السادس:

يعطى لك النموذج المقدر على الشكل:

$$\hat{Y}_i = 1,38 + 0,12X_i \quad : \quad i = 1,2.....n$$

$$RSS = 0,6528 \;,\; \sum x_i^2 = 162 \;,\; n = 8 \;,\; \lambda = 5\%$$

أوجد مجال الثقة لـ β. وأختبر الفرضية $H_0 : \beta = 0$.

التمرين السابع:

لديك النموذج الخاص بدالة الإستهلاك:

$$\hat{C}_i = 623,28 + 0,402X_i \quad : \quad i = 1,2\ldots.80$$

$$SE \quad (147,54) \quad (2,91)$$

إختبر صحة الفرضيتين التاليتين $H_0 : \alpha = 0$ ،$H_0 : \beta = 0$، ومارأيك في النموذج؟

لو غيرنا النموذج المقدر إلى النتيجة:

$$\hat{C}_i = -7,37 + 0,9Y_d \quad : \quad i = 1,2\ldots.80$$

حيث Y_d هي الدخل المتاح وكانت لدينا النتائج التالية:

$$\frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})} = 201,23 \; ، \; \frac{\hat{\alpha}}{SE(\hat{\alpha})} = 2,44$$

قم بنفس الإختبارات أعلاه. وماحكمك على النموذج الجديد.

التمرين الثامن:

يتحدد مستوى الدخل لدى أصحاب المدرسة النقدية بواسطة كمية النقود المعروضة في السوق.

a) مستعملا البيانات أدناه، إختبر صحة هذه الفرضيات.

b) إشرح المعنى الإقتصادي والإحصائي لمعالم الإنحدار.

c) إذا أرادت الحكومة رفع مستوى الدخل (عن طريق زيادة الإنفاق الحكومي مثلا) إلى 2000 وحدة نقدية ففي أي مستوى يكون عرض النقود؟

السنوات	الدخل	كمية النقود
1967	753	175,7
1968	796.3	187.3
1969	868,5	202,2
1970	935.5	208.8
1971	982,4	219.6
1972	1063.4	233.8
1973	1171,1	255.3
1974	1306.6	270.5
1975	1413.2	283.1

التمرين التاسع:

يحتوي الجدول الآتي على الناتج المحلي الإجمالي X_i، والطلب على الغذاء Y_i في دولة متخلفة لمدة عشرة سنوات متتالية.

Y_i	6	7	8	10	8	9	10	9	11	10
X_i	50	52	55	59	57	58	62	65	68	70

a) قدر دالة الطلب على الغذاء و ما هو المعنى الإقتصادي لنتائجك؟

b) إحسب معامل التحديد و أوجد التغيرات المشروحة وغير المشروحة في الإستهلاك.

c) أحسب الأخطاء المعيارية لمقدرات النموذج. ثم كون إختبارات المعنوية لمعالم الإنحدار عند $\lambda = 5\%$.

d) أحسب 99 % مجال ثقة لمعالم الإنحدار.

التمرين العاشر:

نريد دراسة العلاقة الموجودة بين إنتاج مؤسسة والساعات الإضافية للعمال ولدينا المعطيات التالية:

عدد الساعات الإضافية	0	1	2	3	4
عدد القطع المنتجة	130	145	160	165	170

إختبر المتغيرات وحدد العلاقة النظرية، ثم قدر النموذج وعلق على نتائجك إقتصاديا وإحصائيا.

الفصل الثالث: تحليل الإنحدار المتعدد

لنوسع الآن تحليلنا إلى معادلة إنحدار تحتوي على أكثر من متغير مستقل، لكننا نحتفظ بفرضية الشكل الخطي المختصر. حيث يكون المتغير التابع هو المتغير الداخلي الوحيد في المعادلة. إذ سنتحدث في هذا الفصل عن نموذج الإنحدار الذي يحتوي على أكثر من متغير مستقل واحد (بالإضافة إلى الحد الثابت). أما فرضيات النموذج فهي نفسها المذكورة في نموذج الإنحدار الخطي البسيط والمفصلة في الفصل الثاني([1]). نبدأ بنموذج إنحدار يحتوي على متغيرين مستقلين حتى نبين كيف يمكن أن تحصل مقدرات المربعات الصغرى لمعالم الإنحدار وكيفية شرحها. و من ثم نوسع هذه المعادلة (ذات متغيرين مستقلين) إلى معادلة ذات k متغير مستقل ($k \geq 2$) لنرى مشاكل التقدير التي تنتج عن ذلك. وبالتالي نبين ضرورة إستعمال المصفوفات في مواصلة تحاليلنا لخصائص المربعات الصغرى والنتائج الإحصائية.

3-1 نموذج إنحدار بمتغيرين مستقلين

نمدد النموذج البسيط بفرض أن المتغير التابع Y هو دالة خطية للمتغيرين المستقلين X_2، X_3 وللخطأ العشوائي u_i. إن هذا النموذج هو مجرد تطوير للنموذج البسيط و منه فلا داعي لإشتقاق كل نتائجنا بالتفصيل ما دامت تحصل بنفس الطريقة المستعملة في الفصل الثاني. و نكتب نموذج الإنحدار الخطي ذو متغيرين مستقلين على الشكل:

---

[1]- بالإضافة للفرضيات المذكورة في نموذج الإنحدار البسيط، يجب التوضيح بأن قيم المتغيرات المستقلة X_j $(j = 1, 2, 3)$ لاتحتوي على أية علاقة خطية صحيحة فيما بينها وهذا لتحاشي التعدد الخطي فيما بين المتغيرات المستقلة. كما أن عدد الملاحظات يفوق عدد المعالم المطلوب تقديرها في النموذج.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \quad ; \quad i = 1,2,3.....(3.1)$$

حيث أن β_j هي معالم النموذج المطلوب تقديرها، و Y هو المتغير التابع، X_{ji} هي متغيرات مستقلة، u_i هو المتغير العشوائي. فمثلا، تمثل X_{2i} الملاحظة(i) الخاصة بالمتغير المستقل X_2، β_1 هو الحد الثابت للمعادلة. ويفضل في معظم الحالات كتابة المعادلة (1.3) على الشكل:

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

حيث أن $X_{1i} = 1$ بالنسبة لكل الملاحظات. و يساعدنا الشكل الأخير على سهولة إستعمال المصفوفات في تحاليلنا المتطورة أو التي يأتي ذكرها فيما بعد، عند مناقشتنا نموذج الإنحدار الخطي العام (General Linear Model (G.L.M .

3-1-1 المعادلات الطبيعية لنموذج ذي متغيرين مستقلين

لنأخذ نموذج المعادلة(1.3) فيكون النموذج التقديري على الشكل:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} .....(3.2)$$

حيث أن $\hat{\beta}_1$، $\hat{\beta}_2$، $\hat{\beta}_3$ هي مقدرات المربعات الصغرى للمعالم β_1، β_2، β_3 على الترتيب. $\hat{Y}_i$ هي القيمة التقديرية للمتغير التابع Y_i. و كما هو معروف، فإن الحصول على هذه المقدرات يكون عن طريق تصغير مجموع مربعات البواقي وهي:

$$RSS = \sum \hat{u}_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} \right)^2 ....(3.3)$$

و بإشتقاق RSS جزئيا بالنسبة للمعالم غير المعروفة ومساواة نتائجنا للصفر نجد:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_2} = -2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)X_{2i} = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_3} = -2\sum\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)X_{3i} = 0$$

و من المشتقات الجزلية الثلاثة أعلاه (والمساوية للصفر) لحصل على المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى العادية و هي:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}$$

$$\sum Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} X_{2i} \text{.........}(3.4)$$

$$\sum Y_i X_{3i} = \hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} X_{3i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2$$

و يمكن تقسيم طرفي المعادلة الأولى في (4.3) على n الذي يمثل حجم العينة لنعطي:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X_2} - \hat{\beta}_3 \overline{X_3} \text{...........}(3.5)$$

و لتبسيط نتائجنا، نأخذ النموذج (1.3) في شكل إنحرافات كمايلي:

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i \text{.........}(3.6)$$

حيث أن: $y_i = Y_i - \overline{Y}$، $x_{3i} = X_{3i} - \overline{X_3}$، $x_{2i} = X_{2i} - \overline{X_2}$.

فيكون النموذج التقديري للمعادلة (6.3) هو:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} \text{.........}(3.7)$$

أما مجموع مربعات البواقي فهي:

$$RSS = \sum\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)^2 \text{.........}(3.8)$$

و للحصول على المعادلات الطبيعية نتبع نفس الخطوات السابقة لنجد:

$$\sum x_{2i}y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i}x_{2i}$$

$$\sum x_{3i}y_i = \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}x_{3i} + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i}^2 \quad \text{.........} (3.9)$$

و تسمى المعادلات (9.3) بالمعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى في شكلها الإنحرافي. و لحلها، نضرب المعادلة الأولى بالمقدار $\sum X_{3i}^2$ و الثانية بالجداء (الحد) $\sum X_{2i}X_{3i}$ ثم نطرح هذه الأخيرة من الأولى لنجد:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i}y_i \cdot \sum x_{3i}^2 - \sum x_{3i}y_i \cdot \sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \quad \text{.........} (3.10)$$

أما إذا أردنا الحصول على $\hat{\beta}_3$ فنضرب الأولى بـ $\sum X_{2i}X_{3i}$ والثانية بـ $\sum X_{2i}^2$ ونطرح الثانية من الأولى لنجد:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\sum x_{3i}y_i \cdot \sum x_{2i}^2 - \sum x_{2i}y_i \cdot \sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \cdot \sum x_{3i}^2 - \left(\sum x_{2i}x_{3i}\right)^2} \quad \text{.........} (3.11)$$

و من المعادلات الطبيعية(9.3) نجد:

$$\left.\begin{array}{l} i) \sum \hat{u}_i x_{2i} = \sum X_{2i}\hat{u}_i = 0 \\ ii) \sum \hat{u}_i x_{3i} = \sum X_{3i}\hat{u}_i = 0 \end{array}\right] \text{...........} (3.12)$$

إن شرح معالم الإنحدار يتطلب منا توسيع تحليلنا للنموذج المبسط. فمثلا في النموذج (1.3) تقيس المعلمة β_2 التغير الحاصل في Y و المرتبط بتغير وحدة واحدة في المتغير المستقل X_2 بفرض أن كل القيم الأخرى للمتغيرات المستقلة تبقى ثابتة. أما المعلمة β_3 فتقيس التغير الحاصل في Y والمرتبط بتغير X_3 بوحدة واحدة بفرض أن القيم الأخرى تبقى ثابتة و هكذا.

إذن في كلتا الحالتين تكون فرضية بقاء المتغيرات المستقلة الأخرى ثابتة أساسية و جوهرية عند شرحنا للمعالم. و تسمى هذه الطريقة بمعالم الإنحدار الجزئي Partial regression coefficient. حيث أن β_2، مثلا، تقيس أثر X_2 في Y ولكن مع مراقبة أثر X_3 حتى يبقى ثابتا. نظريا، نحصل على مفهوم خاص علما نثبت X_3 لزيادة قيم X_2. لكن كيف يمكن تطبيق ذلك لما نحصل على مقدار

المربعات الصغرى، $\hat{\beta}_2$. (وفي نفس الوقت على $\hat{\beta}_3$)؟. إن الجواب يمكن تحقيقه بحساب المقدرات في النموذجين(1.3)و(6.3). بواسطة تكوين إنحدارين لنموذجين ذوي متغيرين Two-two variable resgression. و تعمم هذه النتيجة على أي نموذج إنحدار آخر ذو أكثر من متغيرين مستقلين. حيث يعدل الإنحدار الأول المتغير المستقل X_2 (يبقى أثر X_3 ثابتا). بينما يقدر الإنحدار الثاني أثر هذا المتغير المعدل على Y و تجري العملية كما يلي:

الخطوة الأولى:

حدر X_2 في X_3. و عندما نقدر المعادلة. نستطيع حساب القيم التقديرية Filted values و البواقي Residuals للنموذج. و للتبسيط نستعمل البيانات المنحرفة (المتغيرات المنحرفة) حيث يكون النموذج المقدر:

$$x_{2i} = \hat{\alpha} x_{3i} + \hat{u}_i$$

$$\hat{x}_{2i} = \hat{\alpha} x_{3i}$$

ومنه ينتج أن:

$$x_{2i} = \hat{x}_{2i} + \hat{u}_i \ldots\ldots(3.13)$$

كما أن :

$$\hat{u}_i = x_{2i} - \hat{\alpha} x_{3i} = x_{2i} - \hat{x}_{2i}$$

و كذلك نحسب مقدرة المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ على النحو:

$$\hat{\alpha} = \sum x_{2i} x_{3i} \cdot \sum x_{3i}^2 \ldots\ldots(3.14)$$

و ينصب إهتمامنا الآن حول البواقي $\hat{u}_i$. لأن $\hat{u}_i$ تمثل ذلك الجزء من X_{2i} و الذي هو غير مرتبط مع X_{3i}.

الخطوة الثانية:

نحدر Y_i في $\hat{u}_i$ لنجد:

$$y_i = \gamma \hat{u}_i + v_i \ldots\ldots(3.15)$$

حيث أن v_i هو متغير عشوائي (خطأ عشوائي) جديد. بينما $\hat{u}_i$ أصبحت متغيرا مستقلا. و بعد تقدير هذه المعادلة بواسطة المربعات الصغرى العادية نجد:

$$\hat{\gamma} = \sum y_i \hat{u}_i / \sum \hat{u}_i^2 \ldots\ldots..(3.16)$$

حيث تمثل $\hat{\gamma}$ أثر " X_{2i} المعدلة" على Y_i. و إذا كان هذا صحيحا فإنه يلتج لدينا $\hat{\gamma} = \hat{\beta}_2$ على النحو التالي:

$$\hat{u}_i = X_{2i} - \hat{\alpha} X_{3i} = X_{2i} - \left[\frac{\sum X_{2i} X_{3i}}{\sum X_{3i}^2} \right] . X_{3i}$$

و لنعوض ذلك بالمعادلة (16.3) فتصبح:

$$\hat{\gamma} = \sum y_i \hat{u}_i^2 / \sum \hat{u}_i^2 = \frac{\sum X_{2i} y_i - \left(\frac{\sum X_{2i} X_{3i}}{\sum X_{3i}^2} \right) \cdot \sum X_{3i} y_i}{\sum X_{2i}^2 + \left(\frac{\sum X_{2i} X_{3i}}{\sum X_{3i}^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sum X_{2i} X_{3i}}{\sum X_{3i}^2} \right) \sum X_{2i} X_{3i}}$$

و بعد ضرب البسط والمقام بالمقدار $\sum X_{3i}^2$ و تبسيطها نجد أن $\hat{\gamma} = \hat{\beta}_2$

2-3 توسيع النموذج إلى k متغير مستقل:

نقوم بتوسيع النموذج (1.3) أو(6.3) إلى نموذج يحتوي على k متغير مستقل حيث($k > 2$) مستعملين طريقة المربعات الصغرى العادية. و منه نبحث عن المعادلات الطبيعية. إن تمديد النموذج إلى k متغير مستقل يكون على الشكل:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots\ldots\ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \ldots\ldots\ldots(3.17)$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

و تحتوي المعادلات الطبيعية على k معادلة طبيعية. و k متغير مستقل حيث تكون المعالم غير المعروفة هي $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_k$. بينما القيم المعروفة هي مجموع مربعات القيم المستقلة و التابعة و كذلك المجاميع الوسيطية فيما بينها

و إشتقاق k معادلة طبيعية بدون إستعمال قانون الإشتقاق الجزئي المذكور سابقا.
نكتب معادلة العلاقة المقدرة على الشكل:

$$y_i = \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots\dots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i \dots\dots (3.18)$$

و من المعادلة (12.3) لدينا $\sum \hat{u}_i = 0$ ، $\sum X_{ji}\hat{u}_i = 0$. و بإدخال المجموع بالنسبة لكل i في المعادلة (18.3) نحصل على:

$$\sum y_i = \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} + \dots\dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} + \sum \hat{u}_i = 0$$

أما إذا ضربنا المعادلة (18.3) بالمتغير X_{2i} و جمعنا بالنسبة لكل i نحصل على المعادلة الطبيعية الأولى (2) على الشكل:

$$\sum y_i X_{2i} = \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_{2i} X_{3i} + \dots\dots + \hat{\beta}_k \sum X_{2i} X_{ki} \dots (3.19)$$

و نواصل ضرب المعادلة (18.3) بالمتغيرات المستقلة X_{ji} ، $(j \geq 2)$ كل مرة و نجمعها بالنسبة لكل i $(i = 1, 2, \dots, n)$ لنصل إلى آخر معادلة طبيعية على الشكل:

$$\sum X_{ji} y_i = \hat{\beta}_2 \sum X_{ji} X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{ji} X_{3i} + \dots\dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 \dots\dots (3.20)$$

إن حل (k-1) معادلة طبيعية من أجل الحصول على المقدرات $\hat{\beta}_j$ $(j = 2, \dots, k)$ صعب و يتطلب وقتا طويلا. كما أنه لكي نجري إختبارات المعنوية لمعالم الإنحدار الفردية، من الطبيعي أن نتسائل عن إمكانية تطبيق نظرية Gauss Markov على النموذج (17.3) و بالتالي نتسائل كذلك عن إمكانية الحصول على توزيعات مقدرات معالم الإنحدار. إن إشتقاق الخصائص الإحصائية لنموذج الإنحدار المحتوي على أكثر من متغير مستقل معقد، نوعا ما، بدون إستعمال حساب المصفوفات. و لهذا سنكتفي ببعض النتائج فقط. و ذلك في إنتظار مناقشة النموذج في شكل مصفوفات(النموذج الخطي العام) في الفقرات اللاحقة من هذا الفصل.

2- نلاحظ لما يكون النموذج (17.3) في شكله الإنحرافي، فإننا نفقد معادلة طبيعية واحدة ويصبح عدد المعادلات الطبيعية لـ k متغير هو (k-1) معادلة.

عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل في نموذج الإنحدار الخطي، ننتقل من معامل التحديد العادي(مربع معامل الإرتباط البسيط) إلى معامل التحديد المضاعف. و نشير هنا إلى أن معامل الإرتباط البسيط يقيس العلاقة ما بين متغير مستقل و متغير تابع. و تكون عادة هذه العلاقة محصورة ما بين الصفر و الواحد. أما معامل التحديد فهو يقوم بنفس الدور بالإضافة إلى أنه يمكن أن يدرس العلاقة الموجودة ما بين المتغير التابع Y_i و عدة متغيرات مستقلة مرة واحدة. و يسمى بمعامل التحديد المضاعف(المتعدد). كما أنه يمكن أن نبين العلاقة الموجودة ما بين متغير مستقل و عدة متغيرات مستقلة أخرى و يسمى بمعامل الإرتباط المتعدد. ويستعمل عادة في إختبارات إكتشاف التعدد الخطي (أنظر الفصل الرابع) حيث يعتمد عليه الباحثان Farrar-Glauber في شكل معاملات تحديد جزئية على شكل:

$R^2_{x_1.x_2 \ldots x_k}$، و $R^2_{x_2.x_1.x_3 \ldots x_k}$. وعلى العموم نكتب $R^2_{x_j.x_1.x_2 \ldots x_k}$ حيث أنه يربط ما بين المتغير المستقل X_j و بقية المتغيرات المستقلة الأخرى من غير X_j.

ويبين R^2 هنا، نسبة التغير الكلي في Y_i و المشروحة بواسطة خط الإنحدار.

ولحساب قيمة R^2 كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الإنحدار المحتوي على k متغير مستقل، يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في الفصل الثاني لنصل إلى:

$$TSS = ESS + RSS$$

ففي النموذج ذي متغيرين مستقلين بالمعادلة (6.3) يمكن حساب R^2 على الشكل:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \left(\hat{\beta}_2 \sum x_{2i} y_i + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i} y_i\right) \Big/ \sum y_i^2 \quad \ldots\ldots(3.21)$$

أما بالنسبة للنموذج المتعدد بالمعادلة (17.3) فيكون:

$$R^2 = \left[\hat{\beta}_2 \sum x_{2i} y_i + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i} y_i + \ldots \hat{\beta}_k \sum x_{ki} y_i\right] \Big/ \sum y_i^2 \quad \ldots\ldots(3.22)$$

إذن نلاحظ دائما بأن R^2 يقيس نسبة التغير في Y_i و التي تكون مشروحة بواسطة معادلة خط الإنحدار. و هناك مجموعة من المشاكل نواجهها مع إستعمال R^2. فأولا، كل نتائجنا الإحصائية تأتي من الفرضية القائلة بأن نموذجنا المبني في المعادلة (17.3) يكون صحيحا، ثم ليس لدينا طريقة أو قيمة إحصائية بديلة للمقارنة بها. ثانيا، إن R^2 حساس لعدد المتغيرات المستقلة و الموجودة بالنموذج، حيث أن إضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الإنحدار لا يمكن أبدا أن تقلل من قيمة R^2. و بالعكس فإنها يمكن أن تزيد من قيمته(لأن إضافة متغير مستقل جديد للنموذج (17.3) لا يؤثر في التغيرات الكلية TSS، و لكن يزيد في قيمة الإنحرافات المشروحة ESS). و بالتالي فإن تعظيم R^2 يكون بواسطة زيادة متغيرات مستقلة للنموذج الأصلي، و يصبح تفسير و إستعمال R^2 صعبا عندما يكون النموذج بدون الحد الثابت، حيث ليس بالضرورة في هذه الحالة أن يكون $R^2 = ESS/TSS$ محصورا ما بين الصفر و الواحد. إن الصعوبة مع R^2 كمقياس لجودة التوفيق هو أنه يعتمد على التغيرات الحاصلة في المتغير التابع Y_i (التغيرات المشروحة و غير المشروحة). و بالتالي لا يأخذ عدد درجات الحرية بعين الإعتبار في أي مشكل إحصائي.

و نخلص إلى أنه كلما أضفنا متغيرات مستقلة لنموذج الإنحدار، كلما إرتفعت قيمة R^2، و كذلك قيمة مجموع الإنحرافات المشروحة ESS. بينما RSS تنخفض قيمته و سوف نتطرق لهذا الموضوع بالفصل القادم (إضافة متغيرات جديدة للنموذج) **Variable addition**.

بعد ملاحظة أن إضافة متغيرات مستقلة للنموذج لا يمكن أن تقلل من قيمة R^2، بل عادة، ما تزداد هذه القيمة. لأن قيمة البسط في المعادلة(22.3) تزداد بينما يبقى المقام TSS على حاله. و لتصحيح ذلك نعدل R^2 آخذين بعين الإعتبار درجات الحرية (و التي يقل عددها بإضافة متغيرات مستقلة جديدة للنموذج الأصلي). و إذا كان تعريف R^2 هو:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS/n}{TSS/n} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

فإن تعريف $\bar{R}^2$ هو:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k)}{TSS/(n-1)} \text{[3]} \;.....(3.23)$$

و يسمى بمعامل التحديد المصحح.

و بتعويض بسيط نجد:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\cdot\frac{n-1}{n-k} \;....(3.24)$$

و من المعادلة الأخيرة أعلاه، تظهر العلاقة بين R^2 و $\bar{R}^2$ حيث أن:

1) $\bar{R}^2 = R^2$ إذا كانت $k = 1$

2) $\bar{R}^2 \geq R^2$ إذا كانت $k > 1$

3) يمكن أن يأخذ $\bar{R}^2$ قيما سالبة.

إذا كان حجم العينة n كبيرا، فإن $\bar{R}^2$ و R^2 يقتربان في قيمتيهما. لكن في العينات الصغيرة، إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا $(n \geq k)$ بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\bar{R}^2$ يقل بكثير عن R^2. و يمكن أن يأخذ قيما سالبة في هذه الحالة. و بالتالي يجب شرحه على أساس أن قيمته تساوي الصفر إذا حدث ذلك.

إذن $\bar{R}^2$ له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس جودة التوفيق أفضل من R^2. حيث عندما نضيف متغيرات جديدة للنموذج تزداد قيمة R^2، بينما نجد قيمة $\bar{R}^2$ يمكن أن تزيد أو تنقص و ذلك تبعا لأهمية المتغيرات المستقلة المضافة للنموذج. إن إستعمال المقياس الجديد $\bar{R}^2$ يقضي على الأقل، على تساؤلات

3- نقسم TSS على $(n-1)$ لأن درجة حرية واحدة أستعملت في حساب $\bar{Y}$ ونقسم RSS على $(n-k)$ لأن k معلمة إستعملت وقدرت في النموذج قبل الحصول على RSS كماهو موضوع بالمعادلة (37.2) من الفصل الثاني.

بعض الباحثين حول أهمية زيادة عدد المتغيرات للنموذج بدون التفكير في سبب ظهور هذه المتغيرات. على كل حال، لا يجب التفكير في أن $\bar{R}^2$ يحل كل المشاكل المتعلقة بالمقياس R^2 كمقياس لجودة التوفيق. حيث أن القرار حول إمكانية ظهور بعض المتغيرات في النموذج أم لا، تبقى معتمدة على إعتبارات نظرية أخرى في القياس الإقتصادي. كما أن القيمة العددية لـ $\bar{R}^2$ تكون جد حساسة لنوع المعطيات (البيانات) المستعملة.

3-3 النموذج الخطي العام General Linear Model (GLM):

نظرا لمشاكل التحليل و الإختبار الإحصائي التي تواجهنا في دراسة خصائص مقدرات المربعات الصغرى للنموذج(17.3) فإننا نعيد صياغته على الشكل:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ji} + u_i \quad : \quad i = 1,2,\ldots,n \ldots\ldots(3.25)$$

حيث أن $X_{1i} = 1$ من أجل كل i . ليكون الحد الثابت هو β_1، إن هذا الشكل معمم أكثر ما دام يعطي الحالة التي لا تحتوي على حد ثابت. و نكتب المعادلة(25.3) بالنسبة لـ n ملاحظة في شكل مصفوفات:

$$Y = X\beta + U \ldots\ldots(3.26)$$

حيث أن Y و U هما $n \times 1$ موجهين عموديين، X هي $n \times k$ مصفوفة متغيرات مستقلة بحيث أن $n \geq k$ و رتبة X تساوي k (أي $Rank(X) = k$) لتجاوز مشاكل التعدد الخطي. أما β فهي $k \times 1$ موجه عمودي للمعالم غير المعروفة. و نكتب:

$$
\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & \cdots & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix},
$$

$$
\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}
$$

و هي الصيغة المتعارف عليها في القياس الإقتصادي بالنسبة للنموذج الخطي العام. و يكون المشكل الأساسي هو الحصول على مقدر لموجه المعالم غير المعروفة β. ومنه يمكن إعادة صياغة الفرضيات الأساسية للنموذج (و المذكورة سابقا) و التي تناسب النموذج الخطي العام و هي:

1) إن كل ملاحظات موجه المتغير العشوائي U لها وسط مساو للصفر

$$E(\underset{\sim}{U}) = \underset{\sim}{0}$$

2) تكون تباينات الأخطاء العشوائية متجانسة بالنسبة لكل الملاحظات. أما التباينات المشتركة فهي معدومة بالنسبة لكل الملاحظات المختلفة أي:

$$E(\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{U}') = \sigma_u^2 I_n$$

حيث أن I_n هي مصفوفة الوحدة.

3) تكون قيم المتغيرات المستقلة X_{ji} غير عشوائية. أي أن X مصفوفة غير عشوائية كما أنه لا توجد أية علاقة خطية صحيحة فيما بين المتغيرات المستقلة X_{ji} أي أن: $Rank(X) = k \leq n$

4) تتبع الأخطاء العشوائية قانون التوزيع الطبيعي المتعدد Multivariate أي أن:

$$\underset{\sim}{U} \sim IN(\underset{\sim}{0}, \sigma_u^2 I_n)$$

إن الفرضيات الخاصة بالخطأ العشوائي هي أقوى ما يمكن، حتى تضمن الإحصائيات والخصائص الحسابية لمقدرات المربعات الصغرى العادية. و تكون مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء كما يلي:

$$E(\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{U}') = \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & \cdots & \cdots & \cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & \cdots & \cdots & \cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & \cdots & \cdots & \cdots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} var(U_1) & cov(U_1, U_2) & \cdots & \cdots & \cdots & cov(U_1, U_n) \\ cov(U_2, U_1) & var(U_2) & \cdots & \cdots & \cdots & cov(U_2, U_n) \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ cov(U_n, U_1) & cov(U_n, U_2) & \cdots & \cdots & \cdots & var(U_n) \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

إن النموذج التقديري للمعادلة(3.26) (بتوسيع طبيعي وبسيط لنموذج الفصل الثاني) يكون على الشكل:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \ldots\ldots (3.27)$$

حيث أن $\hat{\beta}$ هو موجه المعالم المقدرة، $\hat{Y}$ هو $n \times 1$ موجه عمود القيم التقديرية. أما موجه عمود البواقي فهو:

$$\hat{U} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} \ldots\ldots (3.28)$$

و يتم الحصول على موجه مقدرات المعالم $\hat{\beta}$ عن طريق تصغير RSS، وذلك عن طريق إشتقاق هذه الأخيرة(RSS)، جزئيا بالنسبة للموجه $\hat{\beta}$.

$$RSS = \hat{U}'\hat{U} = \sum \hat{U}_i^2 = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

$$RSS = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} \ldots\ldots (3.29)$$

حيث لدينا المقدارين $\hat{\beta}'X'Y$ و $Y'X\hat{\beta}$ هما عددان سلميان ومتساويان لينتج أن:

$$\frac{\partial(RSS)}{\partial\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

و هو الشرط الضروري من أجل الوصول إلى نقطة الإستقرار. أما إذا إشتققنا ثانية المعادلة أعلاه فنجد:

$$\frac{\partial^2(RSS)}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}'} = 2X'X > 0$$

و بالإعتماد على الفرضية الثالثة تكون رتبة X تامة و منه تكون المصفوفة $X'X$ غير شاذة لينتج:

$$X'Y = X'X\hat{\beta} \ldots\ldots (3.30)$$

و هي المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى. و يكون المقدر $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \ldots\ldots (3.31)$$

و من خصائص المربعات الصغرى العادية (OLS) ينتج:

$$X'\hat{U} = X'(Y - X\hat{\beta}) = X'Y - X'X\hat{\beta} = 0 \ldots\ldots (3.32)$$

و هذا معناه أن مجموع جداءات المتغيرات المستقلة و البواقي يعطي الصفر. أي أن موجه عمود البواقي و مصفوفة المتغيرات المستقلة متعامدين. وذلك لأن قيم X مثبتة($E(X'U) = 0$). حيث تعتبر هذه النتيجة أساسية في المربعات الصغرى. و يعطي أول عنصر من المعادلة(32.3) النتيجة $\bar{U} = 0$. وهذا يعني أن بواقي المربعات الصغرى لها دائما وسط مساو للصفر، شريطة أن تحتوي تلك المعادلة على الحد الثابت([4]). كما أن RSS المعرفة في المعادلة(29.3) تصبح على الشكل:

$$RSS = Y'Y - \hat{\beta}X'Y.......(3.33)$$

4-3 الخصائص الإحصائية لمقدرات المربعات الصغرى:

إذا أخذنا المعادلة (31.3) و عوضنا عن Y نجد:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'U$$

$$\hat{\beta} = \beta + AU..........(3.34)$$

حيث أن $A = (X'X)^{-1}X'$ و بإدخال التوقع نجد:

$$E(\hat{\beta}) = \beta + AE(U) = \beta$$

و منه فإن:

$$E(\hat{\beta} - \beta) = 0......(3.35)$$

و منه فإن موجه مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ هو مقدر خطي وغير متحيز. حيث أنه دالة خطية لموجه الأخطاء U. أو نقول أن $(\hat{\beta} - \beta)$ تمثل إنحدار موجه الأخطاء U في مصفوفة المتغيرات المستقلة X. وبالتالي إذا كانت أثار المتغيرات المحذوفة موزعة عشوائيا، و مستقلة عن X، و لها وسط يساوي

---

[4]- إذا إختفى الحد الثابت من معادلة الإنحدار الخطي، فإن $\bar{U} \neq 0$.

الصفر، فإن مقدرات المربعات الصغرى تكون غير متحيزة مثلما هو مبين بالمعادلة(35.3). أما مصفوفة التباين-التباين المشترك لـ$\hat{\beta}$ فهي:

$$var-cov(\hat{\beta}) = V = E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right]$$

$$V = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & \cdots & \cdots & cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) \\ cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) & \cdots & \cdots & cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_2) & \cdots & \cdots & Var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} \ldots\ldots(3.36)$$

إن وحدات القطر الخاصة بالمصفوفة V تمثل تباينات مقدرات المعالم. بينما تمثل الوحدات الموجودة خارج القطر التباينات المشتركة لمختلف المقدرات. كما أن المصفوفة V هي مصفوفة متناظرة. حيث أن عناصر قطرها يمكن ألا تكون متساوية، بينما العناصر الموجودة أعلى القطر هي نفسها تلك الموجودة أسفل القطر. إذ أن:

$$cov(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j) = cov(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_i) \quad , \quad i \neq j$$

$$i, j = 1,2,\ldots\ldots,k$$

و بالعودة للمعادلة(34.3) نجد:

$$V = E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right] = E[AUU'A'] = \sigma_u^2 AA' = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

و منه نكتب للتبسيط:

$$var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \ldots\ldots(3.37)$$

و إذا كان موجه الأخطاء U يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد، فإن $\hat{\beta}$ هو دالة لهذا الموجه. وبالتالي يكون له توزيع طبيعي متعدد أي:

$$\hat{\beta} \sim IN(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1})$$

إن النتيجة المهمة في طريقة المربعات الصغرى أو نظرية Gauss-Markov هي أن الموجه $\hat{\beta}$ ينتمي إلى مجموعة المقدرات الخطية غير المتحيزة وذات أصغر تباين بالمقارنة مع بقية المقدرات الخطية و غير المتحيزة الأخرى.

و لنعرف من جديد مقدر المربعات الصغرى العادية(OLS)$\hat{\beta}$ من المعادلة(31.3) على الشكل:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = AY$$

بينما نعرف موجه مقدرات آخر هو خطي:

$$b = (A + C)Y = AY + CY......(3.38)$$

حيث C هي مصفوفة ثوابت. و لكي يكون b مقدرا غير متحيز لـβ يجب أن يتحقق الشرط: $E(b) = \beta$ أي:

$$b = (A + C)Y = \beta + CX\beta + (A + C)U$$

ومنه فإن:

$$E(b) = \beta + CX\beta = \beta$$

إذا و فقط إذا كانت$CX = 0$ كشرط ضروري لذلك. و يصبح تعريف b:

$$b = \beta + (A + C)U$$

ليكون تباينه هو:

$$var(b) = E[(b - \beta)(b - \beta)']$$

$$= \sigma_u^2(A + C)(A + C)' = \sigma_u^2(X'X)^{-1} + \sigma_u^2 CC'$$

لأن

$$CA' = CX(X'X)^{-1} = AC' = 0$$

ومنه يكون:

$$var(b) - var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 CC'$$

و نلاحظ أن المصفوفةCC' هي مصفوفة على الأقل موجبة شبه محددة Positif Semi-Definite (P.S.D). و الحالة الوحيدة التي تكون فيها الصيغة التربيعيةCC' معدومة هي لما$C = 0$. و منه يكون مقدر المربعات الصغرى العادية،$\hat{\beta}$، هو أفضل مقدر خطي غير متحيز أي له خاصية BLUE لتحقق:

$$var(b) - var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 CC' \geq 0$$

إن المقدر غير المتحيز لتباين الأخطاء σ_u^2، يعطى عن طريق تقسيم RSS على درجات الحرية المتبقية من التقدير أي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{U}'\hat{U}}{n-k} = \frac{RSS}{n-k} \ldots\ldots(3.39)$$

حيث لدينا من معادلة البواقي: $\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$، و بالتعويض عن قيمة $\hat{\beta}$ من(3.31) نجد:

$$\hat{U} = \left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]Y = \left[I - XA\right]Y = MY$$

حيث أن $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ و هي مصفوفة متناظرة وخاملة (معدومة القوى) و تحقق الخاصية، $MX = 0$. و إذا عوضنا عن Y من المعادلة(3.26) نجد:

$$\hat{U} = MY = MU \ldots\ldots(3.40)$$

و هذا يعني أن البواقي المشاهدة هي دوال خطية للأخطاء غير المعروفة U. و تكون:

$$RSS = \hat{U}'\hat{U} = U'MU$$

و إذا أخذنا التوقع الرياضي لطرفي المعادلة أعلاه ينتج:

$$E(RSS) = E\left[U'MU\right] = E\left[trace(U'MU)\right]$$

$$= trace\left[ME(UU')\right] = \sigma_u^2 trace(M)$$

$$= \sigma_u^2\left[trace(I_n) - trace\left(X(X'X)^{-1}X'\right)\right]$$

$$= \sigma_u^2\left[trace(I_n) - trace(I_k)\right]$$

$$= \sigma_u^2(n-k)$$

نجد أن:

$$\sigma_u^2 = \frac{E(RSS)}{n-k}$$

أي أن:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{RSS}{n-k}$$

و منه نقول أن $\hat{\sigma}_u^2$ هو مقدر المربعات الصغرى العادية لتباين الأخطاء، و هو مقدر غير متحيز لـ σ_u^2.

النموذج في شكله الإنحرافي

لنعرف المصفوفة التالية:

$$M_0 = I - \frac{1}{n} ii' ......(3.41)$$

حيث أن i موجه عمود $n \times 1$، تتكون عناصره من القيمة واحد أي:

$$i' = (1 \quad 1......,1)$$

و منه فإن:

$$\frac{1}{n} i'Y = \frac{1}{n}(1,1,......,1)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \bar{Y}$$

لتكون مثلا:

$$M_0 Y = Y - i\bar{Y} = \left[(Y_1 - \bar{Y}),(Y_2 - \bar{Y}),.......(Y_n - \bar{Y})\right]'$$

و نقول أن ضرب أي موجه عمود من الملاحظات بالمصفوفة M_0 سوف يعطي موجها عموديا لتلك الملاحظات في شكلها الإنحرافي. حيث أن المصفوفة M_0 هي مصفوفة متناظرة و خاملة Idempotent، و لها الخصائص التالية:

$$M_0 i = 0......(3.42)$$

$$M_0 \hat{U} = \hat{U}.....(3.43)$$

إن مشاهدات المتغير التابع Y معرفة على الشكل $Y = \hat{Y} + \hat{U}$. وإذا عرفنا $\hat{Y}$ على النحو:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = \left[i \;\vdots\; X_0 \right] \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \cdots \\ \hat{\beta}_0 \end{bmatrix} = \hat{\beta}_1 i + X_0 \hat{\beta}_0 .....(3.44)$$

حيث أن المصفوفة X_0 هي عبارة عن الموجهات X_j $(j = 2, 3, ..., k)$

أي $\quad n \times (k-1): X_0 = \left[X_2 \quad X_3 ....X_k \right]$

و كذلك لدينا: $\quad (k-1) \times 1 \quad \hat{\beta}_0 = \left[\hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3 ,...... ....\hat{\beta}_k \right]'$

و منه نعيد كتابة المعادلة على الشكل:

$$Y = i\hat{\beta}_1 + X_0\hat{\beta}_0 + \hat{U} ....(3.45)$$

و لنضرب المعادلة(45.3) بالمصفوفة M_0 لنجد:

$$M_0 Y = M_0 X_0 \hat{\beta}_0 + \hat{U} ....(3.46)$$

ثم نضرب من جديد المعادلة(46.3) بالمصفوفة X_0' فينتج:

$$X_0' M_0 Y = X_0' M_0 X_0 \hat{\beta}_0 ....(3.47)$$

و نظرا إلى أن M_0 متناظرة و خاملة فإن:

$$(M_0 X_0)'(M_0 Y) = (M_0 X_0)'(M_0 X_0)\hat{\beta}_0 .. ..(3.48)$$

و نلاحظ أن المعادلة(48.3) تمثل مجموعة معادلات طبيعية للمربعات الصغرى في شكلها الإنحرافي. كما أنه من المعادلة(46.3). و من تعريف M_0 ينتج:

$$Y' M_0 Y = \hat{\beta}_0' X_0' M_0 X_0 \hat{\beta}_0 + \hat{U}'\hat{U} ....(3.49)$$

$$TSS \quad = \quad ESS \quad + \quad RSS$$

لأن: $\quad \hat{\beta}_0' X_0' M_0 \hat{U} = \hat{U}' M_0 X_0 \hat{\beta}_0 = 0$

و منه يصبح معامل التحديد المتعدد (المضاعف) على الشكل:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'M_0Y} = 1 - \frac{U'MU}{Y'M_0Y} \quad .....(3.50)$$

أو على الشكل:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_0'X_0'M_0X_0\hat{\beta}_0}{Y'M_0Y} = \frac{\hat{\beta}_0'X_0'M_0Y}{Y'M_0Y} \quad .....(3.51)$$

و ذلك بإستعمال المعادلة(47.3). أما معامل التحديد المصحح فهو:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k} = 1 - \frac{RSS/(n-k)}{Y'M_0Y/(n-1)} \quad ....(3.52)$$

و بمقارنة بسيطة مع النتائج المحصلة من قبل نجد أن:

$$Y'Y = \sum Y_i^2$$

$$Y'M_0Y = \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = Y'Y - n\overline{Y}^2$$

و لذا عندما نعود للمعادلة(44.3) نجد أن:

$$Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{U}'\hat{U}$$

$$= \hat{\beta}_0'X_0'X_0\hat{\beta}_0 + \hat{U}'\hat{U}$$

و ما دام لدينا الخاصية $\hat{Y}'\hat{U} = X'\hat{U} = 0$ و كذلك $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}}$ [4]. فإن:

$$\left(Y'Y - n\overline{Y}^2\right) = \left(\hat{Y}'\hat{Y} - n\overline{Y}^2\right) + \hat{U}'\hat{U} \quad .....(3.53)$$

$$TSS \quad = \quad ESS \quad + \quad RSS$$

أما عند حذف الحد الثابت من النموذج(26.3) فإن: $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}} + \overline{\hat{U}} \neq \overline{\hat{Y}}$

لأن $\overline{\hat{U}} \neq 0$

4- في نموذج يحتوي على حد ثابت و لكن إذا كان وسط المتغير التابع Y مساو للصفر، تكون المعادلة(53.3) على الشكل: $Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} - \hat{U}'\hat{U}$.

و منه تصبح التجزئة في المعادلة(53.3) أعلاه، غير صحيحة. و بالتالي يصبح إستعمال R^2 كمقياس لجودة التوفيق غير مفيد.

3-5 الإستنباط الإحصائي لمقدرات المربعات الصغرى.

بإدخال قانون التوزيع الطبيعي المتعدد و الموجود بالفرضية الرابعة للنموذج الخطي العام، نقول، نظرا إلى أن موجه مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ هو دالة خطية لموجه الأخطاء العشوائية، فإن هذا المقدر له صفة المتغير العشوائي ويتبع كذلك قانون التوزيع الطبيعي المتعدد. حيث أن: $\hat{\beta} = \beta + AU$

و منه فإن: $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1})$

ثم لدينا بواقي المربعات الصغرى هي $\hat{U} = MU$ إذ أن:

$$\hat{U}'\hat{U} = U'MU$$

$$\frac{\hat{U}'\hat{U}}{\sigma_u^2} = \frac{U'MU}{\sigma_u^2} = \frac{(n-k)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{n-k}$$

حيث أن $Rank(M)$(6)$= trace(M) = n-k$

و مع الخاصية $MX = 0$، يكون الموجهان $\hat{\beta}$، $\hat{U}$ يتبعان التوزيع الطبيعي المتعدد و مستقلين عن بعضهما البعض، و بالتالي فهما موجهان متعامدان حيث.

-6 تكون العلاقة $Rank(M) = trace(M)$ صحيحة فقط لما نتعامل مع المصفوفات الخاصة.

$$\operatorname{cov}\left(\hat{U},\hat{\beta}\right)=E\left[\hat{U}\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right]=E[MUU'A']$$

$$=\sigma_u^2 MA=0 \quad , \quad MX=0$$

و منه نستنتج أن موجه المقدرات $\hat{\beta}$ مستقل كذلك عن $\hat{U}'\hat{U}$ و الذي يستلزم أن $\hat{\beta}$ موزع إستقلاليا عن RSS/σ_u^2 (أو $\hat{\sigma}_u^2$) ونكتب:

$$\hat{\beta}_j \sim N\left(\beta_j,\sigma_u^2 a_{jj}\right) \quad , \quad j=1,2,\ldots\ldots,k$$

حيث أن a_{jj} هو العنصر j الموجود بالقطر للمصفوفة AA' (أو $(X'X)^{-1}$)

ولدينا كذلك:

$$\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)\sim N\left(0,\sigma_u^2 a_{jj}\right)$$

$$\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma_u\sqrt{a_{jj}}}\sim N(0,1)$$

و ليصبح قانون التوزيع t على الشكل:

$$t=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-k}/(n-k)}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma_u\sqrt{a_{jj}}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-k)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}\Big/(n-k)}$$

و نجد بعد الإختصار:

$$t=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_u\sqrt{a_{jj}}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{SE(\hat{\beta}_j)}\sim t_{n-k}\ \ldots\ldots(3.54)$$

و تساعدنا المعادلة(54.3) على تكوين مجالات الثقة لمعالم الإنحدار الفردي بنفس الطريقة المذكورة بالفصل الثاني. و لإجراء إختبار الفرضيات حول قيمة معلمة معينة(β_j مثلا)، نقارن قيمة t_{n-k} المحسوبة أعلاه مع قيم t^* المجدولة

(بمستوى معنوية معين). فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر "بالقيمة المطلقة" من القيمة المجدولة، نرفض فرضية العدم H_0 و العكس بالعكس.

إختبار الفرضيات:

لإجراء الإختبارات الإحصائية حول معنوية معالم النموذج، يفضل الإحصائيون في بعض الإحيان إدخال قيود على معالم نموذج الإنحدار و ذلك لحل بعض المشاكل المطروحة أثناء التحليل. لكن عمليا، ليس من السهل إعتبار هذه الطريقة صحيحة أو ناجحة، حيث أن فرض قيود على معالم النموذج يمكن أن يطرح مشاكل ثانوية أخرى من الناحية الإقتصادية و الإحصائية. فإذا كانت هذه القيود مفروضة بناءا على معلومات مسبقة للنظرية الإقتصادية، يمكننا إعادة البناء النظري للنموذج في شكل يتماشى و هذه القيود. أما إذا كانت ناتجة عن مشاكل في التصرف الإحصائي للنموذج المدروس، فإن تلك القيود ليست بالضرورة دائما صحيحة.

على العموم تتمثل هذه الطريقة في إدخال مجموعة من القيود الخطية و الصحيحة على معالم النموذج من أجل إختبار بعض الفرضيات المطلوبة من طرف النظرية الإقتصادية أو من طرف الإحصائيين. و تكون هذه القيود الخطية مفروضة لإختبار صحتها إحصائيا أو ميدانيا. فإذا فرضنا أن هناك m $(m < k)$ من القيود الخطية، يمكننا تمثيلها تحت الفرضية H_0 كما يلي:

$$H_0: R\beta = r$$

$$H_1: R\beta \neq r$$

حيث أن R هي $m \times k$ مصفوفة قيود و ذات رتبة m. r هو موجه عمود للقيود $m \times 1$. فمثلا إذا كان النموذج:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots\dots\dots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

و كانت مجموعة القيود الخطية المطلوب إختبارها تحت الفرضية H_0 هي:

$$\beta_1 + \beta_2 = 3$$

$$\beta_2 - \beta_3 + \beta_k = 0 \qquad \text{..........(3.55)}$$

ليمكن صياغتها على الشكل التالي: $R\beta = r$ ، أي أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أما إذا أردنا إختبار المعالم الفردية للنموذج مثل:

$$H_0 : \beta_j = 0 \qquad j = 1,2,\ldots..k\ldots\ldots...(3.56)$$

$$H_A : \beta_j \neq 0$$

فإننا نكتب:

$$R \qquad \beta \qquad = r$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = 0$$

و إذا طلب منا إختبار الفرضية المجمعة و الخاصة بكل أميال الإنحدار فنكتب:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \dots\dots\dots\dots = \beta_k = 0 \qquad \dots\dots(3.57)$$

$H_A: \beta_j \neq 0$ على الأقل

و تكون هذه القيود على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R \qquad \beta \qquad = r$$

$$(k-1) \times k \qquad k \times 1 \qquad (k-1) \times 1$$

أي أن كل المتغيرات المستقلة $(X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_k)$ لا تؤثر في تحديد المتغير التابع Y. إذا أعتبرنا مجموعة القيود الخطية $R\beta = r$ هي معادلة خطية، حيث أن الموجه العمود r يكون معروفا و كذلك قيم مصفوفة القيود R معلومة. لنعوض موجه المعالم β بمقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$. ثم نلاحظ أن:

$$E(R\hat{\beta}) = RE(\hat{\beta}) = R\beta \dots\dots(3.58)$$

لكن في ظل الفرضية H_0 نعرف أن $R\beta = r$ و يكون التباين:

$$\text{var}(R\hat{\beta}) = R\,\text{var}(\hat{\beta})R' = \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R' \dots\dots(3.59)$$

و ما دام $\hat{\beta}$ يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد، فإن تركيبته الخطية تكون كذلك أي:

$$R\hat{\beta} \sim N\ (R\beta, \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R')$$

كما أنه من خاصية عدم التحيز $E(R\hat{\beta})-R\beta=0$ ينتج لدينا:

$$R\hat{\beta}-R\beta=R(\hat{\beta}-\beta)=RAU......(3.60)$$

و ذلك بإستعمال المعادلة $\hat{\beta}=\beta+AU$ لتصبح لدينا:

$$R(\hat{\beta}-\beta)=RAU\sim N\left(0,\sigma_u^2 RAA'R'\right)$$

و هي كذلك تحت H_0 صحيحة:

$$R(\hat{\beta}-\beta)=R\hat{\beta}-r\sim N\left(0,\sigma_u^2 RAA'R'\right)......(3.61)$$

و منه نقول إن كان لدينا موجه المتغيرات العشوائية Z ذي الأبعاد $n\times 1$ بحيث يحقق $Z\sim N\left(0,P_{n\times n}\right)$ ، فإن $Z'P^{-1}Z\sim\chi_n^2$. و إذا طبقنا ذلك على المعادلة(61.3) نجد:

$$\left(R\hat{\beta}-r\right)'\left[\sigma_u^2 RAA'R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)\sim\chi_m^2......(3.62)$$

حيث m هي عدد القيود و تمثل كذلك رتبة المصفوفة $RAA'R'$. إن المشكل مع المعادلة(62.3) هو عدم معرفتنا σ_u^2 حتى نجري الإختبار المطلوب أعلاه. لكننا نعرف مقدر هذه القيمة و هو $\hat{\sigma}_u^2$ مثلما وجدنا في المعادلة(39.3). لدينا:

$$\frac{RSS}{\sigma_u^2}=\frac{(n-k)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}\sim\chi_{n-k}^2$$

تكون هذه القيمة مستقلة عن مقدر المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ ، كما بينا من قبل. وفي نفس الوقت مستقلة عن تركيبته الخطية $R\hat{\beta}$. حيث إذا كانت لدينا صيغتين تربيعتين $z'Dz$ ، $z'Mz$ و كانت

$$z\sim N(0,I).....(3.63)$$

ثم إن D ، M مصفوفتان متناظرتان و خاملتان. نقول عن الصيغتين التربيعتين $z'Dz$ ، $z'Mz$ بأنهما مستقلتين عن بعضهما البعض إذا و فقط إذا كانت:

$$D.M(\tilde{\gamma})=0......(3.64)'$$

إن تكوين إختبار التوزيع F يكون في هذه الحالة:

$$\frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_{n-k}/(n-k)}=\frac{(R\hat{\beta}-r)'[RAA'R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/m}{RSS/(n-k)}$$

$$\frac{(R\hat{\beta}-r)'[RAA'R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/m}{\hat{\sigma}^2_u}\sim F_{m,n-k}......(3.64)''$$

و يكون الإختبار على الشكل:

$F_{m,n-k} > F_{m,n-k,\alpha\%}$ نرفض الفرضية H_0 أي أن $R\beta \neq r$

$F_{m,n-k} \leq F_{m,n-k,\alpha\%}$ نقبل الفرضية H_0 أي أن $R\beta = r$

فإذا أردنا إختبار الفرضية الموجودة بالمعادلة (56.3) تكون R عبارة عن موجه سطر أي:

$$R=[0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

أما r فهي عدد سلمي $r=0$ في هذه الحالة وتكون: $\beta_j=0$ لتصبح:

$$R \qquad \hat{\beta} \quad = r$$

$$[0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\begin{bmatrix}\hat{\beta} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_j \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k\end{bmatrix}=0$$

و ينتج أن: $R\hat{\beta}-r=\hat{\beta}_j......(3.64)'''$

نترك إثبات هذه النظرية للفصل الرابع عند تطرقنا لتقدير القيود الخطية.

بأن $m=1$ و منه فإن:

$$var(R\hat{\beta}-r)=\sigma_u^2 RAA'R'=\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'$$

و ما دام R أصبحت عبارة عن موجه أصفار $(1\times k)$ ما عدا العنصر (j) الذي هو الواحد، فإن النتيجة أعلاه تصبح:

$$var(R\hat{\beta}-r)=\sigma_u^2 (X'X)^{-1}=\sigma_u^2 a_{jj}(^8)\ldots\ldots(3.65)$$

و ذلك بناءا على الملاحظة (64.3). ليكون الإختبار على الشكل:

$$F=\frac{(R\hat{\beta}-r)'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)/m}{\hat{\sigma}_u^2/\sigma_u^2}=\frac{\hat{\beta}_j(\sigma_u^2 a_{jj})^{-1}\hat{\beta}_j/1}{\hat{\sigma}_u^2/\sigma_u^2}$$

$$=\frac{\hat{\beta}_j^2}{\hat{\sigma}_u^2 a_{jj}}=\left(\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_u\sqrt{a_{jj}}}\right)^2\sim t^2_{n-k}\sim F_{1,n-k}\ldots..(3.66)$$

و كما لاحظنا في الفصل الثاني من المعادلة(53.2) عند إيجاد العلاقة ما بين توزيعي F و t هي:

$$t^2_{n-k}=F_{1,n-k}\ldots..(3.67)$$

أما إذا أردنا إختبار الفرضية الموجودة بالمعادلة (57.3) ليكون الموجه الخاص بالقيود:

---

[8]

$$R(X'X)^{-1}R'=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & a_{jj} & & \vdots\\ & & & & \vdots\\ a_{k1} & & & & a_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=a_j$$

- a_{jj} هي عناصر القطر j للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \\ \\ \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \quad ....(3.68)$$

و إذا كتبنا المعادلة (68.3) على الشكل:

$\hat{\beta}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{\beta}_k \end{bmatrix}'$، و كذلــك قســـمنا(جزأنــا) المصفوفــة X إلــى $X = [i : X_0]$. حيث أن كل مــن $\hat{\beta}_0$، X_0، i معرفــة بالمعادلات (45.3) و (41.3) على الترتيب، لتكون المصفوفة $X'X$ على الشكل:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & i'X_0 \\ X_0'i & X_0'X_0 \end{bmatrix} ....(3.69)$$

و بتطبيق قانون مقلوب(معكوس) المصفوفة المجزءة، للمصفوفة $(X'X)^{-1}$ يكون الجزء المقابل لـ$X_0'X_0$ هو:

$$\left(X_0'X_0 - X_0'\frac{ii'}{n}X_0\right)^{-1} = (X_0'M_0X_0)^{-1} = R(X'X)^{-1}R'$$

و بتطبيق المعادلة (64.3) على هذه الحالة نجد:

$$\frac{\hat{\beta}_0'(X_0'M_0X_0)\hat{\beta}_0/(k-1)}{\hat{\sigma}_u^2} \sim F_{k-1, n-k} .....(3.70)$$

ومن المعادلة (70.3) نلاحــظ أن $\hat{\sigma}_u^2 = RSS/(n-k)$

و كذلك $ESS = \hat{\beta}_0'X_0'M_0X_0\hat{\beta}_0$

لتصبح:

$$\frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k} \;.....(3.71)$$

و بالتعويض عن قيمة R^2 الموجودة بالمعادلة (40.2) من الفصل الثاني نجد:

$$\frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k} \;.....(3.72)$$

و إعتمادا على تعريف $\overline{R}^2$ بالمعادلة (24.3) يكون:

$$\frac{(n-1)-(1-\overline{R}^2)(n-k)}{(1-\overline{R}^2)(k-1)} \sim F_{k-1,n-k} \;.....(3.72)$$

6-3 الإنحدار المجزأ Partitioned regression

تكلمنا بالمعادلة(13.3)، عن معالم الإنحدار الجزئي، حيث تجري العملية بواسطة إجراء إنحدار نموذجين مختلفين، في المعادلة:

$$Y = X\beta + Z\gamma + U.........(3.73)$$

إذا أردنا تحويل أثر مصفوفة المتغيرات Z إلى المصفوفة X نقوم بتحدير X في Z وذلك لقياس أثر X في Y مع ثبات مصفوفة المتغيرات المستقلة Z كما يلي:

$$X = Z\delta + U$$

و بتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية نجد أن:

$$\hat{X} = Z\hat{\delta}$$

$$X = Z\hat{\delta} + \hat{U}$$

$$\hat{\delta} = (Z'Z)^{-1}Z'X$$

و منه فإن البواقي تصبح:

$$\hat{U} = X - Z\hat{\delta} = \left[I - Z(Z'Z)^{-1}Z'\right]X = M_Z X.....(3.74)$$

حيث أن $M_z = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'$ هي مصفوفة متناظرة وخاملة. و لي مرحلة ثانية نحدر Y على البواقي $\hat{U}$ لنبين أثر X المعدلة في Y كما يلي:

$$Y = \hat{U}\theta + V \ldots\ldots.(3.75)$$

ليكون موجه المقدرات $\hat{\theta}$ كمايلي:

$$\hat{\theta} = (\hat{U}'\hat{U})^{-1}\hat{U}'Y = (X'M_zX)^{-1}X'M_zY\ldots..(3.76)$$

لنعود الآن إلى المعادلة(73.3) ونقدرها مباشرة. حيث نكتب:

$$Y = (X:Z)\begin{pmatrix}\beta\\ \cdots\\ \gamma\end{pmatrix} + U = X^{*}\beta^{*} + U\ldots..(3.77)$$

حيث أن: $\beta^{*} = (\beta:\gamma)'$ ،$X^{*} = (X:Z)$

إن تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على المعادلة(77.3) يعطي

المعادلات الطبيعية: $X^{*'}Y = X^{*'}X^{*}\hat{\beta}^{*}$

وبالتعويض عن قيم X^{*}، β^{*} أعلاه نجد:

$$X'Y = X'X\hat{\beta} + X'Z\hat{\gamma}$$

$$Z'Y = Z'X\hat{\beta} + Z'Z\hat{\gamma}$$

و من المعادلات الطبيعية الثانية نجد:

$$Z'(Y - X\hat{\beta}) = Z'Z\hat{\gamma}$$

$$\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'(Y - X\hat{\beta})\ldots..(3.78)$$

و بتعويض قيمة $\hat{\gamma}$ بالمعادلات الطبيعية الأولى نجد:

$$X'Y = X'X\hat{\beta} + X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y - X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X\hat{\beta}$$

$$X'Y - X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y = X'X\hat{\beta} - X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X\hat{\beta}$$

$$X'M_zY = X'M_zX\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = \left(X'M_zX\right)^{-1}X'M_zY = \hat{\theta}.......(3.79)$$

و منه نقول إذا نزعنا أثر Z من Y و X عن طريق تحدير هذه الأخيرة في Z لنأخذ بواقي الإنحدار. ثم نحدر Y في هذه البواقي سوف نحصل على النتيجة المحصلة من تحدير Y في Z و X مباشرة. و تصلح هذه الطريقة لإزالة أثر الزمن في السلاسل الزمنية أو التمهيد[9] Detrending.

7-3 مثال(2.3):

لدينا بيانات عن الإستهلاك و الدخل الفرديين بالأسعار الحقيقية للفترة (67-89) للجزائر من سلسلة تمارين الفصل الثاني، و إذا كان الشكل الدالي على النحو: $C_t = \beta_1 + \beta_2\Delta Y_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$

حيث أن $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. وهي الدالة المقترحة من طرف Houthakker-Taylor 1970 و حصلنا على المعادلة التقديرية التالية:

$$C_t = -86,76 + 0,767\Delta Y_t + 0,45C_{t-1} + 0,51Y_{t-1}$$

$$S-T \quad (0,467)^{*} \quad (4,79) \qquad (1,817)^{*} \quad (2,098)$$

حيث أن $S-T$ هي الإحصاءة t، و * تعني أن المقدر غير مقبول إحصائيا.

9- M B Stewart and K.F. Walis "Introductory Econometrics" Basil Black Well. Oxford. Page 160. England 1981

$R^2 = 0,98$, $\overline{R}^2 = 0,97$, $h = 4,63$, $F(3,18) = 272,51$

$RSS = 354028,8$, $n = 22$

الملاحظة الأولى المستقاة من المعادلة التقديرية أعلاه هي أن الميل الحدي للإستهلاك(0,51) ضعيف جدا وهذا بسبب وجود المتغير التابع المؤخر C_{t-1} والممثل لإستهلاك السنة الماضية، لكن نجد أن هذه القيمة تكون مرتفعة بالنسبة للمدى الطويل حيث تساوي (0,927). وهذا يعني فعالية و تصرف أحسن للنموذج على المدى البعيد. و إذا أردنا هنا إختبار الفرضية القائلة بأن:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

ضد الفرضية البديلة والقائلة:

$$H_A: \beta_2 \neq 0 \text{، أو } \beta_3 \neq 0 \text{، أو } \beta_4 \neq 0$$

$$\text{أو } (\beta_3, \beta_2) \neq 0 \text{ ، أو } (\beta_3, \beta_4) \neq 0$$

$$\text{أو } (\beta_2, \beta_4) \neq 0 \text{ ، أو } (\beta_2, \beta_3, \beta_4) \neq 0$$

فيكون الإختبار هو:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = 272,51 \sim F_{3,18}$$

أما قيمة F المجدولة فهي $F_{3,18,5\%} = 3,16$.

و منه نلاحظ أن القيمة المحسوبة أكبر من تلك المجدولة لنرفض في الأخير H_0 و نقبل معنوية النموذج ككل. أما بالنسبة للمعالم الفردية فنجد:

$$H_0: \beta_j = 0 \quad vs \quad H_A: \beta_j \neq 0$$

$$\frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} = t_{n-k} \quad , \quad j = 1,2,3,4 \quad , \quad t_{18,0.025} = 2,101$$

$$\frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)} = 0,467 \rightarrow \qquad H_0 \text{ نقبل}$$

$$\frac{\hat{\beta}_2}{SE(\hat{\beta}_2)} = 4,79 \rightarrow \qquad H_0 \text{ نرفض}$$

$$\frac{\hat{\beta}_3}{SE(\hat{\beta}_3)} = 1,817 \rightarrow \qquad H_0 \text{ نقبل}$$

$$\frac{\hat{\beta}_4}{SE(\hat{\beta}_4)} = 2,098 \rightarrow \qquad H_0 \text{ نقبل}$$

و منه نلاحظ بأن المعنوية الإحصائية لأغلبية المعالم الفردية غير مقبولة (ماعدا β_2). أما بالنسبة لمجموعة أميال الإنحدار فكانت فرضية العدم مرفوضة. لكن هذا ليس معناه أن النموذج جيد إحصائيا رغم أن معامل التحديد يبين بأن 98% من تغيرات الإستهلاك مشروحة بواسطة خط الإنحدار. حيث إذا أردنا معرفة قيمة التغيرات المشروحة و التغيرات الكلية نجد:

$$TSS = ESS + RSS$$

$$1 - R^2 = RSS/TSS \Rightarrow TSS = RSS/(1 - R^2) = 17701440$$

$$ESS = TSS - RSS = 17347412$$

كما أن قبول الإختبار F للفرضية البديلة H_A و رفض المعالم الفردية بواسطة التوزيع t يعني أن هناك مشكل تعدد خطي و الذي نناقشه لاحقا بالفصل الرابع. أما إذا أردنا إختبار الفرضية القائلة بأن: $H_0 : \beta_2 = 1$

لدينا:

$$t_{18} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{SE(\hat{\beta}_2)} = |-1,456| = 1,456$$

وهي قيمة أقل من تلك المجدولة. وهذا معناه أننا نقبل H_0.

8-3 سلسلة تمارين حول الفصل الثالث:

التمرين الأول:

في النموذج الخطي التالي: $Y_i = \beta_1 + \sum_{j=2}^{6} \beta_j X_{ji} + u_i$

a) وضح كيف يمكن إشتقاق قانون التوزيع F للفرضية $\beta_1 = \beta_5 = \beta_6 = 0$.

b) إذا كان $\hat{\beta}$ هو مقدر المربعات الصغرى للموجـه β. و b هو موجـه آخر لمقدرات خطية غير متحيزة. بينما W هو موجه الثوابت. بين بأن:

$var(W'b) \geq var(W'\hat{\beta})$ وبالتالي فإن: $var(b_i) \geq var(\hat{\beta}_i)$

c) متى يكون R^2 معدوما أو بأكبر قيمة ممكنة؟ وهل فعلا $0 \leq \bar{R}^2 \leq 1$ ؟

d) إذا كانت لدينا القيود التالية:

$$\beta_2 + \beta_4 - \beta_6 = 0 \quad ; \quad \beta_3 + 5\beta_5 = 0 \quad ; \quad \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_1 = 0$$

فاكتبها على الشكل: $R\beta = r$

e) إذا أصبح النموذج أعلاه على الشكل: $Y_i = \beta_1 + \sum_{j=2}^{3} \beta_j X_{ji} + u_i$، فأوجد مقدرات المربعات الصغرى لمعالم النموذج الجديد عندما تكون $\beta_2 + \beta_3 = 1$.
ثـم أشـتق قـانون الإختبـار المناسـب لهـذه الحالـة.و إختـبر كذلـك الفرضيـة: $H_0: \beta_2 + \beta_3 = 0$.

التمرين الثاني:

لنعتبر النموذجين التاليين:

$$I: \quad \log Y_i = \beta_1 + \beta_2 \log X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

$$II: \quad \log(Y_i / X_{2i}) = \alpha_1 + \alpha_2 \log X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + u_i$$

a) بين بأن تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على النموذجين أعلاه يعطي النتائج التالية: $\hat{\alpha}_2 - \hat{\beta}_2 = 1 \;,\; \hat{\alpha}_3 = \hat{\beta}_3 \;,\; \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1$

b) بين بأن بواقي الإنحدار من النموذجين متماثلة.

c) تحت أية شروط تكون قيمة R^2 المحصلة من النموذج I تزيد عن تلك المحصلة من النموذج II. و ماذا تخبرنا عن جودة التوفيق ؟

التمرين الثالث:

تعطى البيانات التالية لقيم الإنفاق على الملابس Y . الإنفاق الكلي X_2، وسعر الملابس X_3.

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 523 & 705 \\ - & 33439 & 2667,5 \\ - & - & 689,25 \end{bmatrix} \;,\quad X'Y = \begin{bmatrix} 78,8 \\ 4896,5 \\ 429,9 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = 143216 \qquad n = 10$$

a) كون المصفوفة $(X'X)^{-1}$

b) أوجد الموجه $\hat{\beta}$

c) أحسب $R^2 . \bar{R}^2 . SE(\hat{\beta}_j)$ حيث $j = 1,2,3$. وكون إختبارات المعنوية لها.

d) كون 95 % مجالات ثقة لمعالم المجتمع.

ه) أوجد التغيرات المشروحة وغير المشروحة والتغيرات الكلية.

٢) إشرح المعنى الإقتصادي للنموذج.

g) لنكتب نموذج العلاقة أعلاه على الشكل: $Y = [i : X_0]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots \\ \beta_0\end{bmatrix}$

ونعرف: $M_0 = I - i(i'i)^{-1}i'$، حيث أن :

$\beta'_0 = \begin{bmatrix}\beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}$، $X_0^* = \begin{bmatrix}X_2 & X_3\end{bmatrix}$، $i' = (1,\ldots\ldots,1)$.

إختبر الفرضية $R\beta_0 = 0$ مستعملا نسبة التوزيع F.

التمرين الرابع:

لديك نموذج الإنفاق الإستهلاكي للأفراد الجزائريين خلال الفترة 1967-1989 بالأسعار الحقيقية. $C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$

حيث أن C_t هي الإستهلاك الفردي السنوي، Y_t الدخل الفردي السنوي.

و بعد إستعمال قانون المربعات الصغرى العادية لعينة الملاحظات حصلنا على الإنحدارين التاليين:

$$1:\ \hat{C}_t = -98.36 + 0.83Y_t + 0.43C_{t-1} - 0.29Y_{t-1}$$

$$S.E\ \ (179,55)\ \ (0,08)\ \ (0,24)\ \ (0,2)$$

$$R^2 = 0,98\ ,\ \bar{R}^2 = 0,97\ ,\ RSS = 357690,8\ ,\ F_{3,19} = 326,43$$

$$II:\ \hat{C}_t = -343{,}15 + 0{,}96Y_t$$

$$S.E\ \ (140{,}5)\ \ \ (0{,}032)$$

$$R^2 = 0{,}976\ ,\ \ \bar{R}^2 = 0{,}975\ ,\ \ RSS = 436351{,}1\ ,\ \ F_{1,21} = 883{,}49$$

a) أوجد قيمة مقدر تباين الخطأ من النموذجين أعلاه.

b) مـــن النموذجيـــن أعـــلاه كـــون الإختبـــار الإحصـــائي المناســـب للرضية $H_0: \beta_3 = \beta_4 = 0$.

c) من النمـــوذج الثـاني إختبر الفرضيـة $H_0: \beta_2 = 1$ وكون مجال ثقتها لما $\lambda = 0{,}05$.

d) بناءا على معلوماتك من النظرية الإقتصادية و الإحصائية. أي النموذجين تفضل؟ ولماذا ؟

التمرين الخامس:

لتكن دالة الإنتاج من نوع كوب-دوغلاس لدولة ما على الشكل:

$$Q_t = AL_t^{\alpha} \cdot K_t^{\beta} \cdot e^{u_t}$$

و بعد إدخال اللوغاريتم الطبيعي على الدالة و تطبيق قانون المربعات الصغرى على عينة الملاحظات $(n = 39)$، حصلنا على النموذج التقديري التالي:

$$\hat{Y}_t = -3{,}8766 + 1{,}4106X_{2t} + 0{,}4162X_{3t}$$

$$S.E\ (0{,}255)\ (0{,}0884)\ \ \ (0{,}0505)$$

$$R^2 = 0{,}9937\ ,\ \ \hat{\sigma}_u = 0{,}03755$$

حيث أن: $C = \log A$، $X_{2t} = \log L_t$، $X_{3t} = \log K_t$.

a) إختبر المعالم الفردية للإنحدار وأشرح معناها الإحصائي.

b) بين دور R^2 و أحسب $\overline{R}^2$.

c) إختبر الفرضية $H_0: \alpha = \beta = 0$ مستعملا R^2 و درجات الحرية فقط.

d) هل تتعارض لنتائجك في (a) مع تلك المحصلة في (c) ؟ لماذا؟

e) أوجد RSS

f) إذا كانت $(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5,55 & -3 \\ -3 & 1,8 \end{bmatrix}$، أوجد $\hat{var}(\hat{\alpha})$، $\hat{var}(\hat{\beta})$.

g) إشرح المعني الإقتصادي لكل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$.

التمرين السادس:

ليكن النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$
$$i = 1,2,....,10$$

مع المعطيات:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} , \quad X'Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) أوجد موجه المقدرات $\hat{\beta}$

b) إذا كانت $\sum Y_i = 5$، $Y'Y = 58$، أوجد ESS، RSS، R^2، $\overline{R}^2$.

c) كون مجالات الثقة $\lambda = 0,05$.

d) إذا كانت في العلاقة أعلاه $\beta_1 = 0$. فاعد تقدير الموجه β من جديد. و أحسب المقادير: RSS، ESS، R^2، $\overline{R}^2$، $\hat{\sigma}_u^2$.

التمرين السابع:

لديك النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ مع المعطيات:

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 80 & 300 \\ - & 890 & 2400 \\ - & - & 9200 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 1200 \\ 1010 \\ 3620 \end{bmatrix}, \quad Y'Y = 1537$$

a) أوجد موجه المقدرات $\hat{\beta}$، $\hat{\sigma}_u^2$، R^2، $\bar{R}^2$، RSS، ESS.

b) إختبر الفرضيات: $\lambda = 0,05$

$$H_{01}:\beta_2 = 0 \quad vs \quad H_{A1}:\beta_2 > 0$$

$$H_{02}:\beta_3 = 1 \quad vs \quad H_{A2}:\beta_3 > 1$$

$$H_{03}:\beta_2 = \beta_3 = 0 \quad vs \quad H_{A1}:\beta_2 \neq 0, \text{ أو } \beta_3 \neq 0, \text{ أو } (\beta_2,\beta_3) \neq 0$$

التمرين الثامن:

لديك النموذج الخطي التالي: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$

و نكتبه على الشكل:

$$Y = i\beta_1 + X_0\beta_0 + U$$

$$M_0 = I - i(i'i)^{-1}i'$$

و كانت لدينا المعلومات التالية:

$$X_0'M_0X_0 = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 50 \end{bmatrix}, \quad Y'M_0X_0 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$Y'M_0Y = 2 \quad , \quad n = 10$$

a) قدر أميال الإنحدار.

b) أحسب ESS، RSS، R^2، $\hat{\sigma}_u^2$، $\hat{var}(\hat{\beta}_0)$.

الفصل الرابع: ميادين تطبيق الإنحدار المتعدد

4-1 إضافة متغيرات للإنحدار:

عند تطرقنا لحساب معامل التحديد المضاعف وبالتالي توسيع نموذج الإنحدار إلى عدة متغيرات مستقلة (بالفصل الثالث)، تبين لنا بأن إضافة متغيرات (محدرات) جديدة للنموذج سوف تقلل من قيمة RSS وتزيد من قيمة ESS. أما مجموع مربعات الإنحرافات الكلية TSS فتبقى ثابتة. وبناءا على تعريف R^2 في المعادلة (22.3) بالفصل الثالث نلاحظ أن قيمته تزداد كذلك بغض النظر عن أهمية المتغير المستقل المضاف لمعادلة الإنحدار. ومنه لجأنا إلى معامل التحديد المضاعف والمصحح (المعدل) بواسطة درجات الحرية $\overline{R}^2$.

نبحث الآن في هذه الفقرة عما يحدث لمقدرات المربعات الصغرى لما نضيف موجها لمحدرات جديدة محصلة من تحدير موجه المتغيرات التابع Y في مصفوفة المتغيرات المستقلة X. ولنعتبر النموذجين البديلين:

$$Y = X\beta + U......(4.1)$$

$$Y = X\beta + Z\gamma + U....(4.2)$$

حيث أن X هي $n \times (k-m)$، و Z هي $n \times m$ مصفوفتي متغيرات مستقلة. كما أن β هي $(k-m) \times 1$، و γ هي $m \times 1$ موجهي معالم.

ولنجري قانون المربعات الصغرى على النموذجين لنجد المعادلتين التقديريتين:

$$Y = X\hat{\beta} + \hat{U}......(4.3)$$

$$Y = Xb + Z\tau + e....(4.4)$$

حيث أن τ هي موجه مقدرات المربعات الصغرى لـ γ، و b موجه مقدرات لـ β من المعادلة (2.4).

وواضح أن إنحدار الموجه Y في المصفوفتين X وZ لايعطي نفس مقدر β، ونلمس البواقي $\hat{U}$ في الإنحدار العادي للمعادلة (1.4) (أي إنحدار Y في X لوحدها). وسنوضح ذلك بشكل موسع لدى تطرقنا للنتائج الإحصائية. حيث نلاحظ أن إنحدار Y في X يعطي النتيجة:

$$X'\hat{U} = 0 \text{ (1)} .....(4.5)$$

بينما من إنحدار المعادلة (2.4) نحصل على الخاصيتين:

$$X'e = 0.....(4.6)$$

$$Z'e = 0.....(4.7)$$

لإنحدار Y في X من المعادلة (1.4)، يعطي، من تطبيق المربعات الصغرى موجه المقدرات التالي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y.....(4.8)$$

وكذلك موجه البواقي:

$$\hat{U} = Y - X\hat{\beta} = M_X Y = M_X U....(4.9)$$

حيث أن:

$$M_X = I - X(X'X)^{-1} X'....(4.10)$$

وهي مصفوفة متناظرة وخاملة.

أما من إنحدار Y في كل من X وZ بالمعادلة (2.4)، إذا أعدنا صياغة هذه الأخيرة على الشكل:

$$Y = (X \quad : \quad Z)\begin{pmatrix} \beta \\ \cdots \\ \gamma \end{pmatrix} + U = Z_0\gamma_0 + U....(4.11)$$

لبتطبيق المربعات الصغرى على (11.4) نحصل على موجه المقدرات $\hat{\gamma}_0$ والمحتوى على كل من τ وb كما يلي:

---

(1) من خصائص المربعات الصغرى المذكورة بالفصلين الثاني والثالث.

$$\hat{\gamma}_0 = (Z_0'Z_0)^{-1}Z_0'Y$$

$$\begin{pmatrix} b \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{pmatrix}$$

وللحصول على موجهي المقدرات b، τ. يمكن أن نستعمل قانون مقلوب المصفوفات المعمم Matrix General Inverse. أو للضرب المعادلة (4.4) بالمصفوفة Z' لنجد:

$$Z'Y = Z'Xb + Z'Z\tau + Z'e$$

وباستعمال (7.4) نجد: $$Z'Y = Z'Xb + Z'Z\tau$$

وإذا كانت $Z'Z$ غير شاذة فإن: $$\tau = (Z'Z)^{-1}Z'(Y - Xb)$$

ولكن هذه العبارة تحل τ بدلالة b غير المعروفة بدورها. ويكون الحل الكامل لمقدر γ بضرب المعادلة (4.4) بالمصفوفة المتناظرة والخاملة M_X لنجد:

$$M_XY = M_XZ\tau + e....(4.12)$$

حيث أن: $$M_Xe = e \quad , \quad M_XX = 0$$

ثم نضرب المعادلة (12.4) بالمصفوفة Z' لنجد:

$$Z'M_XY = Z'M_XZ\tau + Z'e = Z'M_XZ\tau.....(4.13)$$

وإذا كانت الصيغة التربيعية $Z'M_XZ$ غير شاذة فنحصل على:

$$\tau = (Z'M_XZ)^{-1}Z'M_XY.....(4.14)$$

وللحل من أجل b نضرب دائما المعادلة (4.4) بالمصفوفة المتناظرة والخاملة M_Z والمعرفة على الشكل:

$$M_Z = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'.....(4.15)$$

حيث نجد أن:

$$M_ZY = M_ZXb + e.....(4.16)$$

لأن: $$M_Ze = e \quad , \quad M_ZZ = 0$$

وبضرب المعادلة (16.4) بالمصفوفة X' تصبح:

$$X'M_zY = X'M_zXb + X'e = X'M_zXb.....(4.17)$$

ثم إذا كانت $X'M_zX$ غير شاذة نجد:

$$b = (X'M_zX)^{-1} X'M_zY....(4.18)$$

وإذا بحثنا في العلاقة التي تربط الإنحدارين (1.4) و (2.4)، سوف نجد أن المقدر b والبواقي e، المحصلين من المعادلة (2.4)، يختلفان عن المقدر $\hat{\beta}$ والبواقي $\hat{U}$ الناتجين من تقدير المعادلة (1.4) كمايلي:

نضرب المعادلة (4.4) بـ X' لنجد $X'Y = X'Xb + X'Z\tau$ ومنه يكون:

$$b = (X'X)^{-1} X'Y - (X'X)^{-1} X'Z\tau = AY - AZ\tau$$

$$= A(Y - Z\tau)$$

$$= \hat{\beta} - AZ\tau$$

ليصبح:

$$\hat{\beta} = b + AZ\tau....(4.19)$$

ومنه نلاحظ أن $\hat{\beta} = b$ إذا وفقط إذا كانت $\tau = 0$. أو $X'Z = 0$.

وهذا صعب الحدوث عمليا. وعلى العموم، يكون $\hat{\beta}$ مختلفا عن b. كما أن البواقي $\hat{U}$ في (3.4) سوف تختلف عن مثيلتها في (4.4). والحالة الوحيدة التي تتساوى فيها بواقي الإنحدارين هي لما $\tau = 0$. ونضرب، كالعادة، المعادلة (4.4) بالمصفوفة M_X من (10.4) لنجد:

$$M_xY = M_xXb + M_xZ\tau + e........(4.20)$$

$$= M_xZ\tau + e.......(4.21)$$

ولدينا من المعادلة (3.4) $\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$. لنجد أن:

$$\hat{U} = e + M_xZ\tau......(4.22)$$

وبناءا على نتيجة البواقي بالمعادلة (22.4) يصبح RSS للنموذج (1.4) على الشكل:

$$\hat{U}'\hat{U} = e'e + \tau'Z'M_xZ\tau....(4.23)$$

حيث أن: $\tau'Z'M_xe = e'M_xZ\tau = 0$

ولنستنتج أن: $\hat{U}'\hat{U} \geq e'e$

ونقول أن إضافة محدرات جديدة للنموذج يؤدي إلى تخفيض قيمة RSS وزيادة قيمة ESS. بينما حذف محدرات يؤدي إلى زيادة RSS مثلما لاحظنا بالفصل الثالث.

4-1-1 النتائج الإحصائية:

نعرف، من الفصل الثالث أن النموذج الخطي العام بالمعادلة (1.4) يعطي موجها لمقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ الذي له خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE، تباينه $var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2(X'X)^{-1}$. وبتطبيق المربعات الصغرى على النموذج (2.4) نحصل على الموجهين b ، τ واللذين يجب أن يحققا خاصية BLUE مادام يعتبران كذلك المقدرين الحقيقيين للنموذج (2.4). ومنه نبحث عن تباينهما:

$$b = (X'M_zX)^{-1}X'M_zY = \beta + (X'M_zX)^{-1}X'M_zU$$

حيث أن $M_zZ = 0$. وبإدخال التوقع الرياضي نجد:

$$E(b) = \beta + (X'M_zX)^{-1} X'M_zE(U) = \beta$$

أما التباين:

$$var(b) = var\left[(X'M_zX)^{-1} X'M_zU\right] = \sigma_u^2 (X'M_zX)^{-1}$$

وإذا كانت لدينا العبارة:

$$X'X = X'M_zX + X'P_zX \ldots (4.24)$$

حيث أن M_z ، P_z هما مصفوفتان متناظرتان وخاملتان. أما الصيغتين التربيعيتين بالمعادلة (24.4) فيمكن أن نفترض $X'M_zX$ بأنها محددة موجبة. بينما $X'P_zX$ مصفوفة موجبة شبه محددة، ومنه ينتج لدينا:

$$X'X - X'M_zX = X'P_zX \geq 0$$

لينتج أن:

$$(X'M_zX)^{-1} - (X'X)^{-1} \geq 0$$

ومنه يكون:

$$var(b) - var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 \left[(X'M_zX)^{-1} - (X'X)^{-1}\right] \geq 0$$

$$var(b) \geq var(\hat{\beta})$$

4-1-2 الحذف غير الصحيح لمحدرات:

لنعتبر الآن ماذا يحدث إذا إستعملنا $\hat{\beta}$ (من النموذج (1.4))، لما يكون النموذج الصحيح هو (2.4). ولنحلل خصائص المقدر $\hat{\beta}$ في هذه الحالة:

$$\hat{\beta} = AY = AX\beta + AZ\gamma + AU = \beta + AZ\gamma + AU$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + AZ\gamma$$

$$E(\hat{\beta} - \beta) = AZ\gamma \neq 0$$

نلاحظ أن $\hat{\beta}$ في هذه الحالـة يكون متحيزا! أما تباينـه فيبقـى نفسـه. وعلـه لايلغ خاصية أصغر تباين أي:

$$var(\hat{\beta}) = var(AU) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

و منه نستنتج أن الحذف غير الصحيح للمتغيرات Z (للمحدرات γ) يعطي موجه مقدرات متحيزة لـ β، كما أن مقدر تباين الخطأ للنموذج (1.4)، يكون متحيزا في هذه الحالة أي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{U}'\hat{U}}{[n-(k-m)]} \quad .....(4.25)$$

بحيث أن:

$$E(\hat{\sigma}_u^2) = E\left(\frac{\hat{U}'\hat{U}}{n-k+m}\right) = \frac{1}{n-k+m} E(\hat{U}'\hat{U})$$

$$= \frac{1}{n-k+m} E(e'e + \tau'Z'M_x Z\tau)$$

$$= \frac{1}{n-k+m} [(n-k+m)\sigma_u^2 + \gamma' Z' M_x Z\gamma]$$

$$= \sigma_u^2 + \frac{\gamma' Z' M_x Z\gamma}{n-k+m} \neq \sigma_u^2$$

لنعتبر الآن ماذا يحدث لـ b من النموذج (2.4) لما يكون النموذج الصحيح هو (1.4). أي لما يكون، فعلا، $\gamma = 0$. حيث نأخذ قيمة b المحسوبة وهي:

$$b = (X'M_zX)^{-1}X'M_zY$$

ثم نستعمل المعادلة (1.4) لنعوض عن Y فنجد:

$$b = \beta + (X'M_zX)^{-1}X'M_zU$$

$$E(b) = \beta$$

أما التباين فهو:

$$var(b) = var\left[(X'M_zX)^{-1}X'M_zU\right] = \sigma_u^2(X'M_zX)^{-1}$$

حيث نرى في هذه الحالة أن خاصية عدم التحيز لاتتأثر، كما أن $var(b)$ يحافظ على نفس العبارة. لكن النتيجة النهائية هي أن الحذف غير الصحيح لمجموعة محدرات يعطي مقدرات متحيزة وبأصغر تباين. بينما إدخال محدرات بطريقة غير صحيحة للنموذج يعطي مقدرات غير متحيزة ولكنها غير كفؤة كما لاحظنا من قبل.

4-1-4 إختبار الفرضية $\gamma = 0$

قد تكون عملية إضافة موجه من γ $(m \times 1)$ محدرات للنموذج صحيحة، وقد تكون غير ذلك. فعمليا، لانعرف إذا كان هذا الموجه مساو للصفر أم لا. ومنه نحتاج إلى إختبار الفرضية:

$$H_0 : \gamma = 0$$

ضد:

$$H_A : \gamma \neq 0$$

وبالنسبة للفرضية البديلة H_A يعني أنه على الأقل عنصر واحد من الموجه γ يختلف عن الصفر وليس معناه أن كل عناصر γ غير مساوية للصفر.

وللوصول إلى ذلك نلاحظ أن:

$$\tau = (Z'M_XZ)^{-1}Z'M_XY = \gamma + (Z'M_XZ)^{-1}Z'M_XU$$

$$E(\tau) = \gamma$$

$$var(\tau) = var\left[(Z'M_XZ)^{-1}Z'M_XU\right] = \sigma_u^2(Z'M_XZ)^{-1}$$

و إذا كانت الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي المتعدد ($U \sim N(0,\sigma_u^2 I_N$ نجد:

$$\tau \sim N\left(\gamma, \sigma_u^2(Z'M_XZ)^{-1}\right)$$

و منه فإنه بناءا على تعريف المتغير χ^2 نجد:

$$(\tau-\gamma)'\left[\sigma_u^2(Z'M_XZ)^{-1}\right]^{-1}(\tau-\gamma) \sim \chi_m^2$$

و في ظل الفرضية $H_0:\gamma = 0$ تصبح:

$$H_0: \frac{\tau'(Z'M_XZ)\tau}{\sigma_u^2} \sim \chi_m^2$$

ثم لدينا من الفرضية البديلة H_A (نموذج (2.4)) لنحصل على:

$$H_A: \frac{e'e}{\sigma_u^2} = \frac{(n-k)\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \sim \chi_{n-k}^2$$

و من المعادلة (23.4) لدينا:

$$e'e = \hat{U}'\hat{U} - \tau'Z'M_XZ\tau.....(4.26)$$

$$\hat{U}'\hat{U} - e'e = \tau'Z'M_XZ\tau \geq 0$$

لتكون الإختبار الإحصائي:

$$\frac{\tau'(Z'M_X Z)\tau/m}{e'e/(n-k)} \sim F_{m,n-k}$$

$$\frac{\left(\hat{U}'\hat{U}-e'e\right)/m}{e'e/(n-k)} \sim F_{m,n-k}$$

$$\frac{(RRSS-URSS)/m}{URSS/(n-k)} \sim F_{m,n-k}$$

حيث أن RRSS هي مجموع مربعات البواقي المقيدة في ظل H_0 صحيحة من النموذج (1.4) أي Restricted Residual Sum of Squares. أما URSS فهي مجموع مربعات البواقي غير المقيدة في ظل H_A صحيحة من النموذج (2.4) أي Unrestricted RSS.

4-2 تقدير القيود الخطية:

مثلما أشرنا بالفصل الثالث عند إختبارنا للفرضيات، فإن مبادئ النظرية الإقتصادية قد تجبرنا على فرض بعض القيود على معالم النموذج. وسنكتفي بالقيود الخطية في موضوعنا هذا، ولتقدير النموذج في ظل القيود الخطية نقول أن هناك تقنيتان متكافئتان وهما:

4-2-1 تقنية التعويض:

لنفرض أننا نريد تقدير المعادلة التالية:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \ldots\ldots(4.27)$$

تبعا للقيود الخطية على المعالم $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

إن أحسن مثال على ذلك هو لما تكون المعادلة (27.4) تمثل لوغاريتم دالة الإنتاج. ومنه يكون النموذج المقدر هو دالة كوب-دوغلاس للإنتاج. كما أن القيود المفروضة أعلاه تمثل قانون ثبات الغلة. وبتطبيق قانون المربعات الصغرى المتمثل في تصغير RSS تبعا للقيد $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 1$ نجد:

$$S = Min \sum \left(Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - (1 - \hat{\beta}_2) X_{3t} \right)^2 ......(4.28)$$

و التي تعطي بدورها:

$$S = Min \sum \left(Y_t - X_{3t} - \hat{\beta}_1 - \beta_2 (X_{2t} - X_{3t}) \right)^2 ......(4.29)$$

كما نلاحظ بأن المعادلة (29.4) تعني إنحدار الملاحظات $(Y_t - X_{3t})$ في الملاحظات $(X_{2t} - X_{3t})$ بالإضافة إلى الحد الثابت أي:

$$(Y_t - X_{3t}) = \beta_1 + \beta_2 (X_{2t} - X_{3t}) + u_t$$

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^* + u_t .....(4.30)$$

حيث أن:

$$Y_t^* = Y_t - X_{3t}$$

$$X_{2t}^* = X_{2t} - X_{3t}$$

و منه، فلتقدير المعادلة الأصلية (27.4) تبعا للقيود الخطية $\beta_2 + \beta_3 = 1$، فإننا ببساطة نقدر النموذج (30.4) أعلاه من أجل الحصول على المقدرات $\hat{\beta}_1$، $\hat{\beta}_2$، ومن ثم نستطيع الحصول على مقدر لـ $\hat{\beta}_3$ على النحو:

$$\hat{\beta}_3 = 1 - \hat{\beta}_2$$

أما إذا وضعنا $\beta_2 = 1 - \beta_3$ من القيد السابق $\beta_2 + \beta_3 = 1$، فإنه يمكننا صياغة أو تقدير المعادلة التالية:

$$(Y_t - X_{2t}) = \beta_1 + \beta_3 (X_{3t} - X_{2t}) + u_t ......(4.31)$$

وبإتباع نفس الطريقة نحصل على المقدرات $\hat{\beta}_1$، $\hat{\beta}_2$، ثم نعوض لنحصل على $\hat{\beta}_2 = 1 - \hat{\beta}_1$. لنعتبر النموذج السابق في المعادلة (27.4). حيث نقوم بتقدير هذه المعادلة تبعا للقيد $\beta_2 = \beta_3$. وبتطبيق طريقة التعويض نجد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 (X_{2t} + X_{3t}) + u_t \ldots\ldots (4.32)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_t + u_t$$

حيث أن

$$Z_t = X_{2t} + X_{3t}$$

ثم نواصل تطبيق قانون المربعات الصغرى لنحصل على $\hat{\beta}_1$، $\hat{\beta}_2$.

4-2-2 إختبار مجموعة قيود خطية:

إن أحد الأسباب المعروفة في تقدير المعادلة تبعا لمجموعة قيود خطية، هو من أجل الوصول إلى إقتراح إختبار لإمكانية وجود هذه القيود. ولنأخذ الطريقة المباشرة في تكوين هذا الإختبار وهي قيد الصفر. فإذا فرضنا أننا نقدر المعادلة:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \gamma_1 Q_{1t} + \gamma_2 Q_{2t} + \gamma_3 Q_{3t} + u_t \ldots\ldots (4.33)$$

حيث أن Q_j $(j = 1, 2, 3)$ هي ثلاثة متغيرات وهمية [2] تسمح بالتغير الموسمي.

و يمكن أن نختبر الفرضية القائلة بأنه لاتوجد تغيرات موسمية في الحد الثابت

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \ldots\ldots (4.34)$$

لتكون المعادلة المقيدة هي (27.4) سابقا:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_{3t} X_{3t} + u_t$$

و لإختبار صحة القيد السابق (34.4) نتبع الخطوات التالية:

أ) أفرض القيود المراد إختبارها على المعادلة لتحصل على الشكل المقيد للمعادلة. ثم أقدر هذه الأخيرة بواسطة المربعات الصغرى. وأحسب RSS.

---

[2]: سنتطرق بالتفصيل لموضوع المتغيرات الوهمية في الفقرات اللاحقة.

2) قدر النموذج العادي في (33.4)، ثم أحسب URSS

3) كون الإحصاءة التالية:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/m}{URSS/(n-k)} \sim F_{m,\, n-k} \quad \ldots (4.35)$$

أو ما يكافئها:

$$F = \frac{\left(R_U^2 - R_R^2\right)/m}{\left(1 - R_U^2\right)/(n-k)} \sim F_{m,\, n-k}$$

حيث m هي عدد القيود المفروضة على النموذج، أو الفرق ما بين عدد المعالم في النموذجين المقيد وغير المقيد. أما R_U^2، R_R^2 فيشيران إلى معاملي التحديد في النموذجين غير المقيد والمقيد على الترتيب. فإذا كانت القيود المفروضة مقبولة (أي H_0 صحيحة)، فإننا ننتظر من الشكل المقيد وغير المقيد أن يعطيا نتائج متقاربة، أي أننا ننتظر من RRSS وURSS أن يكونا متساويين. وبالتالي تكون قيمة الإحصاءة F موجبة وقريبة من الصفر. أما إذا كانت القيود غير صحيحة (H_0 مرفوضة)، فإننا ننتظر أن تكون RRSS أكبر من URSS ومنه تكون الإحصاءة F أكبر من الصفر.

3-2-4 إختبار القيود الفردية

في حالة إختبارنا لقيد فردي، هناك طريقة بديلة لتحاشي تقدير النموذج المقيد للمعادلة الأصلية. حيث يمكن تقدير التباينات والتباينات المشتركة للمعالم المقيدة نظرا للتطور التكنولوجي في أجهزة الكمبيوتر. ونعود للمعادلة (27.4) ونفرض القيد $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

وإذا كتبنا $\beta_2 + \beta_3 = \gamma$، فإن القيد السابق يصبح على الشكل: $H_0: \gamma = 1$. وبتطبيق قانون المربعات الصغرى على المعادلة (27.4)، غير المقيدة، تكون المقدرة $\hat{\gamma}$ تتبع التوزيع الطبيعي ونحصل على الإختبار الإحصائي:

$$t_{n-3} = \frac{\hat{\gamma} - 1}{SE(\hat{\gamma})} = \frac{(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) - 1}{SE\left(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3\right)}$$

في ظل الفرضيات الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى. تكون المقدرتين $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ غير متحيزين ليكون $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$ مقدرا غير متحيز لـ $\beta_2 + \beta_3$ كذلك. وبما أن $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ يتبعان التوزيع الطبيعي. فإن حاصل جمعهما يتبع التوزيع الطبيعي كذلك. لنجد:

$$\frac{(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) - (\beta_2 + \beta_3)}{\sqrt{var(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} \sim N(0,1)$$

حيث أن:

$$var(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = var(\hat{\beta}_2) + var(\hat{\beta}_3) + 2\,cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

وبتعويض σ_u^2 الموجودة في التباينات والتباينات المشتركة أعلاه بمقدرها غير المتحيز $\hat{\sigma}_u^2$ نجد:

$$\frac{(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) - (\beta_2 + \beta_3)}{\sqrt{v\hat{a}r(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} = \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 1}{SE\left(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3\right)} \sim t_{n-3} \ldots (4.36)$$

4-2-4 تقنية مضاعفات لاقرانج

لنعود إلى نموذج المعادلة (26.3) بالفصل الثالث ونفرض عليه مجموعة القيود الخطية:

$$H_0: R\beta = r$$

حيث أن كلا من R و r معرفتين سابقا. ويستوجب علينا الآن، إيجاد مقدر لموجه المعالم β والذي يوافق مجموعة القيود الخطية المفروضة على النموذج. ومنه نقوم بإختيار هذا الموجه الذي يقوم بتصغير RSS تبعا للقيود:

$$R\beta = r$$

ولقوم بتعريف العبارة اللاقرانجية على الشكل:

$$S(\beta,\lambda) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) - \lambda'(R\beta - r)$$

حيث أن λ هي $m \times 1$ موجه عمود لمضاعفات لاقرانج. وبالإشتقاق الجزئي لهذه العبارة بالنسبة لـ β، λ على الترتيب نجد:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta - R'\lambda$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -(R\beta - r)$$

وبضرب المعادلة الجزئية الأولى بالعبارة $R(X'X)^{-1}$ ومساواتها بالصفر نجد:

$$-2R(X'X)^{-1}X'Y + 2R\beta - R(X'X)^{-1}R'\lambda = 0$$

مع $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$، و $R\beta = r$ نجد:

$$-2R\hat{\beta} + 2r - R(X'X)^{-1}R'\lambda = 0$$

$$\lambda = -2\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)$$

وبتعويض λ في المشتقة الجزئية الأولى من جديد نجد:

$$-2X'Y + 2X'X\hat{\beta} + 2R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right) = 0$$

$$X'X\beta = X'Y - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)$$

ومنه يكون مقدر المربعات الصغرى المقيد على الشكل:

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right) \ldots (4.37)$$

وبالتعويض عن $\hat{\beta} = \beta + AU$ نجد:

$$\hat{\beta}_R = \beta + AU - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RAU$$

$$= \beta + \left[I - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right]AU$$

$$\hat{\beta}_R = \beta + HAU....(4.38)$$

حيث أن:

$$H = \left[I - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right]....(4.39)$$

ومنه نجد: $E(\hat{\beta}_R) = \beta + HAE(U) = \beta$

وبالتالي فإن مقدر المربعات الصغرى المقيد $\hat{\beta}_R$ هو مقدر غير متحيز لـ β. أما مصفوفة التباين-التباين المشترك فهي:

$$var(\hat{\beta}_R) = var(HAU) = \sigma_u^2 HAA'H' = \sigma_u^2 H(X'X)^{-1}H'...(4.40)$$

ويمكن كتابتها كذلك على الشكل:

$$var(\hat{\beta}_R) = \sigma_u^2 H(X'X)^{-1} \ (^3)$$

ولمناقشة المعنوية الإحصائية لموجه المقدرات المقيدة $\hat{\beta}_R$ نختبر الفرضية

$$H_0 : R\beta = r$$

ضد: $$H_A : R\beta \neq r$$

ثم نلاحظ أن:

$$U \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$$

يؤدي إلى: $$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1}\right)$$

ومن المعادلتين (58.3) و (59.3) بالفصل الثالث لدينا تحت H_0 صحيحة:

$$R\hat{\beta} \sim N\left(r, \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right)$$

---

[3]- يمكن للقارئ التأكد من ذلك عن طريق تعويض قيمة H المعرفة في (39.4) بالمعادلة (40.4).

أي: $R\hat{\beta} - r \sim N\left(0, \sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right)$

لتكون المتغير العشوائي χ^2 على الشكل:

$$H_0 : (R\hat{\beta} - r)'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta} - r) \sim \chi_m^2$$

$$H_A : \frac{\hat{U}'\hat{U}}{\sigma_u^2} = \frac{U'MU}{\sigma_u^2} \sim \chi_{n-k}^2$$

وإذا كانت χ_m^2 مستقلة عن χ_{n-k}^2، فإننا نكون الإختبار الإحصائي الموجود بالمعادلة (63.3) على الشكل:

$$\frac{(R\hat{\beta} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta} - r)/m}{\hat{U}'\hat{U}/(n-k)} \sim F_{m,n-k} \ldots (4.42)$$

وبناءا على تعريف الصيغتين التربيعيتين $z'Dz$، $z'Mz$ بالفصل الثالث والنتيجة الموجودة بالمعادلة (64،3) حيث أن إستقلال الصيغتين التربيعيتين أعلاه يعني أن $DM = 0$ فإننا نكتب:

$$R\hat{\beta} - r = R(\hat{\beta} - \beta) = RAU$$

لنجد:

$$\frac{1}{\sigma_u^2}(R\hat{\beta} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta} - r)$$

$$= \frac{1}{\sigma_u^2}U'A'R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RAU$$

$$=\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)'\left[A'R'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}RA\right]\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)$$

$$=\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)'D\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)=z'Dz.....(4.43)$$

حيث أن $D=A'R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RA$ وهي مصفوفة متناظرة وخاملة. أما الموجه z فهو:

$$z=\frac{U}{\sigma_u}\sim N(0,I_n).....(4.44)$$

كما أنه يمكن كتابة URSS على الشكل:

$$\frac{\hat{U}'\hat{U}}{\sigma_u^2}=\frac{U'MU}{\sigma_u^2}=\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)'M\left(\frac{U}{\sigma_u}\right)=z'Mz......(4.45)$$

وللتأكد من إستقلالية البسط عن المقام في المعادلة (42.4) نلاحظ:

$$D.M=A'R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RAM=0$$

لأن:
$$AM=(X'X)^{-1}X'M=0$$

ونستنتج أن العبارة (42.4) صحيحة.

ولنعتبر الأن البواقي الناتجة عن التقدير المقيد:

$$\hat{U}_R=Y-X\hat{\beta}_R=Y-X\left[\hat{\beta}-(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)\right]$$

$$=\left(Y-X\hat{\beta}\right)+X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RAU$$

$$\hat{U}_R = \hat{U} + A'R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}RAU$$

$$\hat{U}_R = \hat{U} + DU$$

ولتكون مجموع مربعات البواقي المقيدة RRSS

$$RRSS = \hat{U}_R'\hat{U}_R = \left[\hat{U} + DU\right]'\left[\hat{U} + DU\right]$$

$$= \hat{U}'\hat{U} + \hat{U}'DU + U'D'\hat{U} + U'D'DU$$

الشيئ الذي يعني: $RRSS = \hat{U}'\hat{U} + U'DU$

أي أن:

$$RRSS = URSS + U'DU$$

$$= URSS + \left(R\hat{\beta} - r\right)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)$$

ومنه نكتب:

$$\frac{RRSS - URSS}{\sigma_u^2} = \frac{1}{\sigma_u^2}\left(R\hat{\beta} - r\right)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right) \sim \chi_m^2$$

$$\frac{URSS}{\sigma_u^2} \sim \chi_{n-k}^2$$

لتصبح النسبة:

$$\frac{\chi_m^2/m}{\chi_{n-k}^2/(n-k)} = \frac{(RRSS - URSS)/m}{URSS/(n-k)}$$

$$= \frac{\left(R\hat{\beta} - r\right)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)/m}{\hat{\sigma}_u^2} \sim F_{m,n-k} \ldots\ldots(4.46)$$

وتعرف هذه الطريقة بتحليل التباين. وهي طريقة قوية حيث تقترح شرحا بديلا لاختبار الإحصائي الموجود بالمعادلة (6.3.3) والمعتمد على توزيع الموجه $R\hat{\beta}$ الذي له وسط r ومصفوفة تباين هي $\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'$.

- إن إحدى التطبيقات لتحليل التباين هي الحالة الخاصة والمذكورة بالفصل الثالث مثل القيد $\beta_j = 0$ ، $j = 1, 2, \ldots\ldots, k$. حيث تكون المصفوفة R في هذه الحالة عبارة عن موجه سطر على الشكل $(0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$. والتي تعني أنها تحتوي على أصفار ماعدا العنصر j والمساوي للواحد. بينما الموجه r يكون هنا عبارة عن رقم سلمي Scalar والمساوي للصفر.

3-4 التنبؤ في ظل النموذج الخطي العام:

تطرقنا في الفصل الثاني لموضوع التنبؤ بملاحظة المتغير التابع Y_t في فترة مستقبلية معينة، ولتكن النقطة (t). وذلك بمعرفتنا المسبقة لقيمة المتغير المستقل في تلك الفترة X_t. وهذا مايسمى بالتنبؤ النقطي. أما بالنسبة للنموذج الخطي العام، فنتطرق إلى قضية التنبؤ بالملاحظات المستقبلية (أو خارج العينة) لموجه الملاحظات الخاصة بالمتغير التابع وذلك بمعرفتنا لمصفوفة ملاحظات المتغيرات المستقلة والمستقبلية. ويسمى هذا النوع من التنبؤ بالتنبؤ بمجال. فليكن النموذج الخطي العام خلال العينة n والمقدر على الشكل:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ومقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta} = AY$. ويكون المقدر بملاحظة واحدة في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,n+1} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k X_{k,n+1}$$

أما التنبؤ بعد فترتين في المستقبل:

$$\hat{Y}_{n+2} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,n+2} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k X_{k,n+2}$$

ونواصل هكذا إلى أن نصل إلى التنبؤ بالفترة m في المستقبل:

$$\hat{Y}_{n+m} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,n+m} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k X_{k,n+m}$$

إذن إذا أردنا التنبؤ بمجموعة من الملاحظات المستقبلية (التنبؤ بمجال) بفترة تساوي m ملاحظة مرة واحدة. يكون موجه القيم التقديرية المتنبأ بها هو:

$$\hat{Y}_n^m = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{n+1} \\ \hat{Y}_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{Y}_{n+m} \end{bmatrix}$$

- أما مصفوفة ملاحظات المتغيرات المستقلة والمستقبلية فهي:

$$X_n^m = \begin{bmatrix} 1 & X_{2,n+1} & \cdots & X_{k,n+1} \\ 1 & X_{2,n+2} & \cdots & X_{k,n+2} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & X_{2,n+m} & \cdots & X_{k,n+m} \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن كتابة النموذج الخطي العام المتنبأ به على الشكل:

$$Y_n^m = X_n^m \beta + U_n^m \ldots\ldots\ldots(4.47)$$

حيث أن Y_n^m هي $m \times 1$، و X_n^m هي $m \times k$، U_n^m هي $m \times 1$. كما أن النموذج المقدر للمعادلة (47.4) هو $\hat{Y}_n^m = X_n^m \hat{\beta}$. ويكون وسط مقدر التنبؤ هو:

$$E\left(\hat{Y}_n^m\right) = X_n^m E(\hat{\beta}) = X_n^m \beta = E\left(Y_n^m\right)$$

إذن نستنتج أن: $E(\hat{Y}_n^m) = E(Y_n^m) = X_n^m\beta$

ومنه نقول أن $\hat{Y}_n^m$ هو تنبؤ خطي غير متحيز للعبارة $E(Y_n^m) = X_n^m\beta$

ليكون التباين:

$$var(\hat{Y}_n^m) = E\left[(\hat{Y}_n^m - X_n^m\beta)(\hat{Y}_n^m - X_n^m\beta)'\right]$$

$$= \sigma_u^2 X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m \ldots.(4.48)$$

نعرف موجه أخطاء التنبؤ على الشكل:

$$d = Y_n^m - \hat{Y}_n^m \ldots.(4.49)$$

$$E(d) = E(Y_n^m - \hat{Y}_n^m) = 0$$

أما التباين فهو:

$$var(d) = var(Y_n^m - \hat{Y}_n^m) =$$

$$E\left[-X_n^m(\hat{\beta}-\beta) + U_n^m\right]\left[-X_n^m(\hat{\beta}-\beta) + U_n^m\right]'$$

$$= E\left[X_n^m(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'X_n'^m + U_n^m U_n'^m - X_n^m(\hat{\beta}-\beta)U_n'^m - U_n^m(\hat{\beta}-\beta)'X_n'^m\right]$$

وإذا كانت فرضا العبارة التالية:

$$E(UU') = \sigma_u^2 I_n \quad , \quad E(U_n^m U_n'^m) = \sigma_u^2 I_m$$

ثم فرضنا أن:

$$E\begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U' & U_n'^m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E(UU') & E(UU_n'^m) \\ E(U_n^m U') & E(U_n^m U_n'^m) \end{bmatrix} = \sigma_u^2 I_{n+m}$$

لأن $E(UU_n'^m) = E(U_n^m U') = 0$ بنــــاءا علــــى الفرضيــة

$E(u_i u_j) = 0$ $i \neq j$: لنستنتج أن:

$$E\left[X_n^m(\hat{\beta}-\beta)U_n'^m\right] = X_n^m E(AUU_n'^m)$$

$$= X_n'^m AE(UU_n'^m) = 0$$

ليكون تباين موجه خطأ التنبؤ على الشكل:

$$var(d) = \sigma_u^2 X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + \sigma_u^2 I_m \ldots\ldots(4.49)'$$

ويكون هذا التنبؤ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز يمكن الحصول عليه أي له خاصية BLUP. حيث إذا عرفنا $\tilde{Y}_n^m$ في شكل خطي لعينة ملاحظات المتغير التابع مع وسط لخطأ التنبؤ مساو للصفو$E(Y_n^m - \tilde{Y}_n^m)$. لدينا المتراجحة:

$$var(Y_n^m - \tilde{Y}_n^m) - var(Y_n^m - \hat{Y}_n^m) \geq 0$$

ومنه نستنتج أن $\hat{Y}_n^m = X_n^m \hat{\beta}$ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز.

وتكون إختبارات التنبؤ عن طريق إيجاد التوزيع الذي يعتبر فرضية العدم والقائلة بأن النموذج الخطي العام يبقى محافظا على شكله من الملاحظة الأولى إلى الملاحظة $n+m$ في المستقبل. أي نفترض عدم تغير البناء الهيكلي للنموذج، ونكتبه:

$$H_0: \quad \hat{Y} = X\hat{\beta} \quad : \quad i = 1,2,\ldots\ldots,n,n+1,\ldots\ldots,n+m$$

وذلك ضد الفرضية البديلة، والتي تقول أن نموذج العينة الأولى n يختلف عن نموذج التنبؤ للفترة m.

وللوصول إلى التوزيع المناسب لهذه الفرضية نلاحظ أن:

$$\begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma_u^2 I_{n+m})$$

$$d = Y_n^m - \hat{Y}_n^m = -X_n^m(\hat{\beta}-\beta) + U_n^m = -X_n^m AU + U_n^m \ldots(4.50)$$

$$d \sim N\left[0, \sigma_u^2\left(X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + I_m\right)\right]$$

ومن تعريف المتغير العشوائي χ^2 لدينا:

$$d'[var(d)]^{-1} d \sim \chi^2_m \ldots\ldots\ldots(4.51)$$

حيث أن m هنا هي رتبة $var(d)$ لنجد أن:

$$\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right)' \left[\sigma_u^2 X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + \sigma_u^2 I_m\right]^{-1} \left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right) \sim \chi^2_m$$

ولدينا خلال فترة العينة n مايلي:

$$\frac{\hat{U}'\hat{U}}{\sigma_u^2} = \frac{U'MU}{\sigma_u^2} = \frac{1}{\sigma_u^2}\begin{pmatrix} U' & U_n'^m \end{pmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix} \sim \chi^2_{n-k} \ldots\ldots(4.52)$$

حيث أن: $M = I - X(X'X)^{-1} X'$

وبتحليل موجه أخطاء التنبؤ على الشكل:

$$d = \left[-X_n^m AU + U_n^m\right] = \left[-X_n^m A \quad I_m\right]\begin{bmatrix} U \\ U_n^m \end{bmatrix}$$

لتكون العبارة (51.4) على الشكل:

$$\frac{1}{\sigma_u^2}\begin{pmatrix} U' & U_n'^m \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -A'X_n'^m \\ \cdots \\ I_m \end{bmatrix}\left[X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + I_m\right]^{-1}\left[-X_n^m A \quad I_m\right]\begin{bmatrix} U \\ U_n^m \end{bmatrix} \sim \chi^2_n$$

ولنعرف

$$z = \frac{1}{\sigma_u}\begin{pmatrix} U \\ U_n^m \end{pmatrix} \sim N\left(0, I_{n+m}\right)$$

وكذلك:

$$D=\begin{bmatrix}-A'X'^{m}_{n}\\ \cdots \\ I_{m}\end{bmatrix}\left[X^{m}_{n}(X'X)^{-1}X'^{m}_{n}+I_{m}\right]^{-1}\left[-X^{m}_{n}A \quad : \quad I_{m}\right]$$

لتصبح العبارة (51.4)والعبارة (52.4) على التوالي:

$$z'Dz \sim \chi^2_m$$

$$z'M'z \sim \chi^2_{n-k}$$

حيث أن D، M مصفوفتان متناظرتان وخاملتان. ومنه نجد:

$$D.M=\begin{bmatrix}-A'X'^{m}_{n}\\ \cdots \\ I_{n}\end{bmatrix}\left[X^{m}_{n}(X'X)^{-1}X'^{m}_{n}+I_{m}\right]^{-1}\left[X^{m}_{n}A \quad : \quad I_{m}\right]\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

ليصبح χ^2_m مستقلا عن χ^2_{n-k} ونكون الإحصاءة التالية:

$$F=\frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_{n-k}/(n-k)}=\frac{z'Dz/m}{z'Mz/(n-k)}$$

$$=\frac{\left(Y^{m}_{n}-\hat{Y}^{m}_{n}\right)'\left[X^{m}_{n}(X'X)^{-1}X'^{m}_{n}+I_{m}\right]^{-1}\left(Y^{m}_{n}-\hat{Y}^{m}_{n}\right)/m}{\hat{\sigma}^2_u}\sim F_{m,n-k}\ldots.(4.53)$$

وإذا كانت $m=1$ (التنبؤ بالنقطة) يصبح التوزيع أعلاه على الشكل:

$$\frac{\left(Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}\right)'\left[X_{n+1}(X'X)^{-1}X'_{n+1}+1\right]^{-1}\left(Y_{n+1}-\hat{Y}_{n+1}\right)}{\hat{\sigma}^2_u}\sim F_{1,n-k}=t^2_{n-k}$$

إن أبسط ملاحظة نستطيع إستنتاجها هي وجود إنحدارين مختلفين، حيث لما تكون فرضية العدم هي الصحيحة (الشكل الهيكلي للنموذج لايتغير في الفترة m) نقوم بتحدير Y في المتغيرات المستقلة مستعملين كل الملاحظات الحاضرة والمستقبلية أي حجم العينة $n+m$ لنحصل على مجموع مربعات البواقي المقيدة RRSS. بينما يتعلق الإنحدار الثاني بالبواقي غير المقيدة URSS. ثم نكون الإختبار التالي:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/m}{URSS/(n-k)} \sim F_{m,n-k} \quad \ldots\ldots(4.54)$$

ويمكن إعادة صياغة نموذج العينة n على الشكل:

$$Y_1 = X_1\beta_1 + U_1$$

أما نموذج التنبؤ بالمعادلة (47.4) فيكتب على الشكل:

$$Y_2 = X_2\beta_2 + U_2$$

وتكون الفرضية المختبرة هي: $H_0: \ \beta_1 = \beta_2$

ومن أجل التنبؤ النقطي نستعمل تنبؤ المربعات الصغرى المعتمد على $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{Y}_2 = X_2\hat{\beta}_1 = X_2(X_1'X_1)^{-1}X_1'Y_1 = X_2A_1Y_1$$

إن هذا المقدر هو دالة خطية لـ Y_1 (لفترة العينة n). ومنه يكون التنبؤ غير المتحيز لـ Y_2 إذا كانت $\beta_1 = \beta_2$ هو على الشكل:

$$E(\hat{Y}_2) = E(X_2\hat{\beta}_1) = X_2\beta_1 = E(Y_2)$$

ولتكوين التنبؤ بمجال نعرف موجه أخطاء التنبؤ كما في المعادلة (49.4):

$$d = (Y_2 - \hat{Y}_2) = Y_2 - X_2\hat{\beta}_1 = X_2\beta_2 - X_2\hat{\beta}_1 + U_2$$

$$= X_2\beta_2 + U_2 - X_2(\beta_1 + A_1U_1)$$

$$= X_2\beta_2 - X_2\beta_1 + U_2 - X_2A_1U_1$$

حيث أن: $A_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'$

$$E(d) = X_2(\beta_2 - \beta_1)$$

وإذا كانت H_0 صحيحة فإن: $E(d) = 0$

ليكون التباين:

$$\text{var}(d) = \text{var}[U_2 - X_2A_1U_1] = \sigma_u^2[I_m + X_2(X_1'X_1)^{-1}X_2']$$

ولما $m = 1$ فإن Y_2 و d تصبح أعدادا سلمية و X_2 موجه سطر، ليكون:

$$\text{var}(d) = \sigma_u^2[1 + X_2(X_1'X_1)^{-1}X_2']$$

ونكون مجال الثقة لـ Y_2 من الإحصاءة t إذا كان $\beta_2 = \beta_1$:

$$\frac{Y_2 - X_2\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_u\left[1+X_2(X_1'X_1)^{-1}X_2'\right]^{1/2}} = \frac{Y_2 - X_2\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{var}(d)}} \sim t_{n-k} = \sqrt{F_{1,n-k}}$$

حيث أن: $\hat{\sigma}_u^2 = \left(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1\right)'\left(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1\right)/(n-k)$

ويكون 90 % مجال ثقة لـ Y_2 هو:

$$-t_{n-k,0.05}\cdot\sqrt{\hat{var}(d)} < Y_2 - X_2\hat{\beta}_1 < t_{n-k,0.05}\cdot\sqrt{\hat{var}(d)}$$

ليكون مجال التنبؤ النقطي هو:

$$X_2\hat{\beta}_1 - t_{n-k,0.05}\cdot\sqrt{\hat{var}(d)} < Y_2 < X_2\hat{\beta}_1 + t_{n-k,0.05}\cdot\sqrt{\hat{var}(d)}$$

أما لما $1 < m$ نستعمل الإحصاءة الموجودة بالمعادلة (51.4) لنجد:

$$\frac{d'[var(d)]^{-1}d}{\hat{\sigma}_u^2} = \frac{\left(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1\right)'\left[I+X_2(X_1'X_1)^{-1}X_2'\right]^{-1}\left(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1\right)/m}{\hat{\sigma}_u^2} \sim F_{m,n-k} \quad (4.55)$$

ونلاحظ أنه لما $m \le k$. فإننا لانستطيع حساب الإنحدار الثاني $Y_2 = X_2\beta_2 + U_2$ لأن عدد المعالم المطلوب تقديرها أكبر من حجم العينة m. ومنه تكون البواقي $\hat{U}_2$ مساوية لموجه الأصفار. ويكون الإختبار المناسب هو ذلك المذكور أعلاه بالمعادلة (55.4) أو ذلك الموجود بالمعادلة (53.4). والمعتمد على توزيع الموجه d لأخطاء التنبؤ. كما يمكن إستعمال الإختبار الموجود بالمعادلة (54.4) والمعتمد على تحليل التباين. وهما إختباران متكافئان. أما لما $m > k$. ليكون الإختبار المناسب لهذه الحالة من أجل الفرضية $\beta_1 = \beta_2$ هو إختبار التغير الهيكلي للكاتب والباحث G.Chow [4] حيث يتطلب منا في هذه الحالة إجراء إنحدارين منفصلين لكل من العينة n. وفترة التنبؤ m. ولنكون بعدها مجموع مربعات البواقي غير المقيدة. بالإضافة إلى الإنحدار المقيد والذي يكون حجم عينته هو $n + m$. إذن تصبح لدينا ثلاثة إنحدارات منفصلة وسوف نوضحها في الفقرة القادمة لإختبارات التغير الهيكلي.

[4] G.C. Chow "Econometrics" Mc-Graw-Hill inc. USA Chap 2 - Page 63. 1983

4-4 إختبارات التغير الهيكلي:

أغلبية الإنحدارات التي عرفناها لحد الآن تركز على نموذج الإنحدار الخطي الفردي ومجموعات البيانات الفردية. لكن هناك أوقات نريد فيها التأكد من صلاحية النموذج لمجموعتين مختلفتين من البيانات. مثل دالة الإستهلاك الخاصة بسنوات الحرب وسنوات السلم (أي إستعمال مايسمى بالمتغيرات الوهمية). ولإختبار ماإذا كانت فرضية إختلاف نموذجي إنحدار معينين صحيحة أو لا. نبدأ عادة بفرضية العدم H_0 والقائلة بأن الإنحدارين متماثلين (أي أن النموذج يحافظ على نفس بنائه الهيكلي)، ثم نلاحظ إذا كان بإمكاننا رفض الفرضية البديلة أم لا. إن هذا النوع من الإختبار يسمى بإختبار المساواة مابين مجموعات من معالم إنحدار أو إختبارات التغير الهيكلي أو إختبار Chow، وهو إحدى التطبيقات المهمة لتحليل التباين.

1-4-4 إختبار التغير الهيكلي لنموذج بسيط:

لنعتبر إنحدارين يمثلان عينتي ملاحظات دالة الإستهلاك الكينزية لأفراد المجتمع الجزائري خلال فترتين إقتصاديتين مختلفتين. فتخص الأولى فترة مابين 1967 و1978. $n_1 = 12$. والعينة الثانية للفترة 1979-1989 ($n_2 = 11$). ونريد معرفة ما إذا كان هناك تغير في دالة الإستهلاك خلال الفترتين الزمنيتين المشار إليهما. وذلك بواسطة إختبار فرضية العدم القائلة بأن معالم الإنحدار متساوية في العينتين. أو هل التصرف الإقتصادي للأفراد الجزائريين يبقى ثابتا عبر الزمن أم لا. ولنأخذ العينتين n_1 و n_2 ونكتب دالة الإستهلاك الكينزية على الشكل:

$$\begin{cases} Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \ : \ t = 67,68,\ldots,78 \\ Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 X_t + u_t \ : \ t = 79,\ldots,89 \end{cases} \quad \ldots\ldots.(4.56)$$

حيث أن X_t هي الدخل الفردي الحقيقي، Y_t الإستهلاك الفردي الحقيقي. إن المعادلة (56.4) أعلاه، تمثل النموذج غير المقيد والذي يسمح لكل من الحد الثابت والميل بأن يكونا مختلفين في الفترتين المذكورتين أعلاه. ويمكن كتابة الشكل غير المقيد في صيغة مصفوفات على النحو:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & 0 & 0 \\ 1 & X_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n_1} \end{bmatrix}$$

$$\ldots.(4.57)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{n_1+1} \\ Y_{n_1+2} \\ \vdots \\ Y_{n_1+n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & X_{n_1+1} \\ 0 & 0 & 1 & X_{n_1+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & X_{n_1+n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{n_1+1} \\ U_{n_1+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n_1+n_2} \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة النموذج (57.4) في شكل نموذج خطي عام:

$$Y = X\beta + U$$

حيث أن:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} , \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \ (n_1 + n_2) \times 1$$

$$(n_1 + n_2) \times 4$$

$$\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \ \vdots \ \gamma_1 \quad \gamma_2] = [\beta^{*} \ \vdots \quad , \qquad ' = [Y_1' \quad Y_2']$$

أي بصورة مفصلة (مكافئة) كمايلي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + U \ldots\ldots (4.58)$$

لنأخذ المصفوفة X على أنها مصفوفة كتلة قطرية **Block Diagonal**، كما أن المصفوفتين X_1 ، X_2 لهما عمود $n_1 \times 1$ ، $n_2 \times 1$ من الواحد. بالإضافة إلى ملاحظات الدخل الفردي كمايلي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n_1} \end{bmatrix} , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & X_{n_1+1} \\ 1 & X_{n_1+2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n_1+n_2} \end{bmatrix}$$

$$n_1 \times 2 \qquad\qquad n_2 \times 2$$

كما أن الموجه β يمثل موجه عمود (4×1) لأربعة معالم هيكلية. وبتطبيق لتون المربعات الصغرى على المعادلة (58.4) نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (X_2'X_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1'Y_1 \\ X_2'Y_2 \end{pmatrix}$$

ليلتج مايلي:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}^* \\ \hat{\gamma}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y_1 \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'Y_2 \end{bmatrix} \quad \ldots.(4.59)$$

ومن ثم يلتج لدينا:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y_1 = \begin{bmatrix} i'i & i'X_i \\ X_i'i & X_i'X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i'Y_i \\ X_i'Y_i \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$\hat{\gamma}^* = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} = (X_2'X_2)^{-1}X_2'Y_2 = \begin{bmatrix} i'i & i'X_i \\ X_i'i & X_i'X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i'Y_i \\ X_i'Y_i \end{pmatrix}$$

$$i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2$$

لنجد الموجهين $\hat{\beta}^*$، $\hat{\gamma}^*$ على التوالي:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} n_1 & \sum_{i=1}^{n_1} X_i \\ \sum_{i=1}^{n_1} X_i & \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_1} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n_1} X_i Y_i \end{pmatrix} \quad \ldots..(4.60)$$

$$\hat{\gamma}^* = \begin{pmatrix} n_2 & \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i \\ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i & \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} Y_i \\ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i Y_i \end{pmatrix} \ldots\ldots(4.61)$$

وباستعمال المعادلة (59.4) يمكننا الحصول على البواقي $\hat{U}$ لكل من العينتين n_1 وn_2 أي $n_1 + n_2$ ثم نتبع الخطوات الآتية لإختبار الفرضية:

$$H_0: \ \beta^* = \gamma^* \ldots\ldots(4.62)$$

a) نكون مجموع مربعات البواقي غير المقيدة URSS على النحو:

$$URSS = \hat{U}'\hat{U} = \hat{U}_1'\hat{U}_1 + \hat{U}_2'\hat{U}_2$$

حيث أن $\hat{U}_1$ و $\hat{U}_2$ هما بواقي المربعات الصغرى للعينتين n_1، n_2 على الترتيب.

b) إن فرضية العدم والتي تدل على عدم وجود تغير هيكلي خلال الفترتين الزمنيتين المختلفتين، أو عدم إختلاف المعالم الهيكلية للنموذج خلال العينتين n_1 و n_2 هي كما في المعادلة (62.4). ونكتبها في صيغة قيود خطية $R\beta = r$ كما يلي:

$$H_0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[I \;\vdots\; -I]\begin{bmatrix}\beta^* \\ \cdots \\ \gamma^*\end{bmatrix} = \underset{\sim}{0} \ldots\ldots(4.63)$$

$$R \quad \beta \quad = r$$

ويصبح النموذج المقيد على الشكل:

$$H_0: \begin{bmatrix}Y_1 \\ Y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_1 \\ X_2\end{bmatrix}\beta^* + U \ldots\ldots(4.64)$$

أي

$$Y = \quad X \;\; \beta \;\; + U$$

وبالرجوع للمعادلة (42.4) والمكتوبة على الشكل:

$$\frac{\left(R\hat{\beta}-r\right)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)/m}{\hat{U}'\hat{U}/(n-k)} \sim F_{m,n-k}$$

حيث أن m هنا هي عدد القيود وتساوي 2 كما في (62.4). ومن المعادلة (37.4) لدينا مقدر المربعات الصغرى المقيدة:

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)$$

لتصبح لدينا العبارة:

$$R\hat{\beta} - r = -\left[(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\right]^{-1}(\hat{\beta}_R - \hat{\beta})$$

وبتعويض العبارة الأخيرة، أعلاه بالمعادلة (42.4) نجد:

$$\frac{\left(\hat{\beta}_R-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\hat{\beta}_R-\hat{\beta}\right)/m}{\hat{U}'\hat{U}/(n-k)} \sim F_{m,n-k}\ ^{(5)}\ldots(4.65)$$

وهو الإختبار الخاص بالفرضية H_0 بالمعادلة (63.4)، حيث أن $n=n_1+n_2$.

ولإجراء إختبار الفرضية H_0 لدينا طريقتين، إما أن نستعمل مقدر المربعات الصغرى غير المقيدة بالمعادلة (59.4) والمصفوفة R والموجه r المعرفين بالمعادلة (63.4) لحساب الإحصاءة F المعرفة بالمعادلة (42.4). أو نحسب البواقي $\hat{U}_R$ المقيدة من النموذج المقيد بالمعادلة (64.4) بواسطة المربعات الصغرى. ثم نعوض سواء في المعادلة (46.4) أو في المعادلة (65.4) أعلاه. وتكون الطريقة الثانية أسهل وأبسط من الأولى. حيث نعيد كتابة المعادلة (46.4) على الشكل:

$$\frac{\left(\hat{U}_R'\hat{U}_R-\hat{U}'\hat{U}\right)/m}{\hat{U}'\hat{U}/(n-k)}=\frac{(RRSS-URSS)/m}{\hat{U}'\hat{U}/(n-k)} \sim F_{m,n-k}\ldots(4.66)$$

حيث أن:

$$\hat{U}'\hat{U}=\hat{U}_1'\hat{U}_1+\hat{U}_2'\hat{U}_2$$

وقد نكون في بعض الأحيان مهتمين بتجانس الميلين الحديين للإستهلاك في الدالة الكينزية المذكورة بالمعادلة (56.4). وتكون الفرضية الموجودة بالمعادلة (62.4) في شكل جديد كمايلي:

$$H_0:\ \beta_2=\gamma_2\ldots(4.67)$$

5- تجدر الإشارة هنا إلى أن $n=n_1+n_2=12+11=23$. كما أن عدد درجات الحرية في المقام هي $n_1+n_2-2k=23-4=19$. لأن عدد المعالم الهيكلية للنموذج غير المقيد تساوي 4. أما عدد القيود فهي $m=2$ ليصبح الإختبار في (65.4) و(66.4) هو على التوالي:

$$\frac{\left(\hat{\beta}_R-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\hat{\beta}_R-\hat{\beta}\right)/2}{\hat{U}'\hat{U}/19} \sim F_{2,19}$$

$$\frac{(RRSS-URSS)/2}{\hat{U}'\hat{U}/19} \sim F_{2,19}$$

حيث أن للمعلمتين β_1، γ_1 مطلق الحرية في أخذ أي قيد مختلفة في الإنحدارين الموجودين بالمعادلة (56.4) إذ تخبرنا النظرية الكينزية بأن حجم مضاعف الدخل الوطني يعتمد على الميل الحدي للاستهلاك (β_2 أو γ_2) وليس على الحد الثابت (β_1، γ_1) حيث أن هذا الأخير يشكل الانفاق المستقل عند حساب الدخل التوازني ومنه فإن H_0 بالمعادلة (67.4) هي تعبير عن تماثل مضاعف الدخل في الفترتين الزمنيتين (1967-78)، (1979-89). ومنه نكتب النموذج المقيد تبعا لـ H_0 في (67.4):

$$H_0: \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & 0 & X_1 \\ 0 & i_2 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta \end{bmatrix} + U \ldots (4.68)$$

أما النموذج غير المقيد فهو:

$$H_1: \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + U \ldots (4.69)$$

حيث أن i_1 هو موجه عمود $1 \times n_1$ على الشكل: $i_1' = (1 \; \ldots \; \ldots \; 1)$ و i_2 هو موجه عمود $1 \times n_2$ كذلك $i_2' = (1 \; \ldots \; \ldots \; 1)$، X_1 هي $1 \times n_1$ ملاحظات الدخل في الفترة (1967-78)، X_2 هي $1 \times n_2$ ملاحظات الدخل للفترة (1979-89). وبتطبيق قانون المربعات الصغرى على النموذجين (68.4) و (69.4). نستطيع إختبار نفرضية H_0 وذلك بمقارنة RRSS من (68.4) مع URSS من (69.4). كما إعتمدنا على ذلك من قبل. حيث نلاحظ أن النموذج (69.4) هو نفسه الموجود بالمعادلة (58.4). إذ أن:

$$U_1'U_1 = Y_1'Y_1 - \beta_1'X_1'Y_1$$

$$U_2'U_2 = Y_2'Y_2 - \beta_2'X_2'Y_2$$

بأن:

$$X_1 = [i_1 \;\vdots\; X_i] \;:\; i = 1,2,\ldots\ldots,n_1$$

$$X_2 = [i_2 \;\vdots\; X_i] \;:\; i = n_1 + 1,\ldots\ldots,n_1 + n_2$$

نجد أن:

$$URSS = \hat{U}'\hat{U} = \hat{U}_1'\hat{U}_1 + \hat{U}_2'\hat{U}_2'$$

أما بالنسبة للنموذج المقيد بالمعادلة (68.4) فيكون النموذج على الشكل:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = X_*\beta_0 + U \;:\; i = 1,2,\ldots\ldots,n_1 + n_2$$

حيث أن:

$$\beta_0' = (\beta_1 \quad \gamma_1 \quad \beta)$$

$$X_* = \begin{pmatrix} i_1 & 0 & X_1 \\ 0 & i_2 & X_2 \end{pmatrix}$$

لنجد:

$$X_*'X_* = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & i_1'X_1 \\ 0 & n_2 & i_2'X_2 \\ X_1'i_1 & X_2'i_2 & X_1'X_1 + X_2'X_2 \end{bmatrix}, \quad X_*'Y = \begin{bmatrix} i_1'Y_1 \\ i_2'Y_2 \\ X_1'Y_1 + X_2'Y_2 \end{bmatrix}.$$

$$RRSS = \hat{U}_*'\hat{U}_* = Y'Y - Y'X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*'Y$$

$$= Y'[I - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*']Y = Y'M_*Y$$

ويكون الإختبار الإحصائي المناسب للفرضية $H_0 : \beta_2 = \gamma_2$ هو:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)\; m}{URSS\;(n-2k)} \sim F_{m,n-2k} \ldots(4.70)$$

في مثالنا $m = 1$ ، $n = n_1 + n_2 = 23$ ، $k = 2$. لتصبح المعادلة (70.4):

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/1}{URSS/19} \sim F_{1,19}$$

2-4-4 إختبار التغير الهيكلي لـk متغير مستقل:

ليكن لدينا النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$. حيث لدينا الفترتين الزمنيتين (1967-78)، (1979-89). ونريد إختبار الفرضية H_0 والقائلة بعدم تغير معالم النموذج خلال العينتين $n_1 = 12$، $n_2 = 11$. وتكون:

$$H_0: \ \beta_1 = \gamma_1, \ \beta_2 = \gamma_2, \ldots\ldots, \beta_k = \gamma_k$$

ولنضع نموذجي العينتين على الشكل:

$$Y_1 = X_1\beta_1 + U_1 \ : \ i = 1,2\ldots\ldots n_1$$

$$Y_2 = X_2\beta_2 + U_2 \ : \ i = n_1 + 1,\ldots\ldots n_1 + n_2$$

حيث أن X_1 هي $n_1 \times k$، و X_2 هي $n_2 \times k$. لتكون الفرضية H_0 هي:

$$H_0: \ \beta_1 = \beta_2 \ldots\ldots (4.71)$$

ويكون النموذج غير المقيد على الشكل:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + U \ldots (4.72)$$

ولنجزء المصفوفتين X_1، X_2 إلى الشكل:

$$X_1 = [i_1 \ \vdots \ X_{01}] \ , \ X_2 = [i_2 \ \vdots \ X_{02}]$$

حيث أن i_1 و i_2 معرفتين من قبل. بينما X_{01} هي $n_1 \times (k-1)$، و X_{02} هي $n_2 \times (k-1)$ لتصبح المعادلة (72.4) على الشكل:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_2 & X_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \beta_{01} \\ c_2 \\ \beta_{02} \end{bmatrix} + U \ldots (4.73)$$

حيث أن c_1 يمثل الحد الثابت الخاص بالعينة الأولى. c_2 كذلك حد ثابت خاص بالعينة الثانية. أما β_{01} فهي $(k-1)\times 1$ للعينة الأولى و β_{02} هي $(k-1)\times 1$ للعينة الثانية. أما النموذج المقيد $H_0: \ \beta_1 = \beta_2$ فهو:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \beta + U$$

وبناءا على تجزئة كل من X_1 و X_2 يصبح النموذج أعلاه على الشكل:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_{01} \\ i_2 & X_{02} \end{bmatrix} \beta + U \ldots (4.74)$$

ويكون إختبار فرضية تساوي معالم الإنحدارين للفترتين المختلفتين بواسطة تقدير المعادلة غير المقيدة في (73.4) للحصول على URSS بدرجات حرية هي $n_1 + n_2 - 2k$. ومن ثم تقدير المعادلة المقيدة في (74.4) للحصول على RRSS بدرجات حرية هي $n_1 + n_2 - k$. ثم نكون الإختبار الإحصائي التالي:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/k}{URSS/(n_1 + n_2 - 2k)} \sim F_{k,n-2k} \ldots (4.75)$$

وهو مايسمى بإختبار التغير الهيكلي أو إختبار Chow. كما لما تكون $n_2 < k$ فإن إنحدار الفترة الثانية (n_2) يعطي بواقي معدومة ($\hat{U}_2'\hat{U}_2 = 0$) لتصبح URSS على الشكل: $URSS = \hat{U}'\hat{U} = \hat{U}_1'\hat{U}_1$ بدرجات حرية هي $(n_1 - k)$.

بينما النموذج المقيد بالمعادلة (74.4) يعطي نفس مجموع مربعات البواقي المقيدة RRSS بدرجات حرية هي $n_1 + n_2 - k$ لتصبح المعادلة (75.4) على الشكل:

$$\frac{(RRSS-URSS)/n_2}{URSS/(n_1-k)}=\frac{(RRSS-RSS_1)/n_2}{RSS_1/(n_1-k)}=$$

$$\frac{\left(\hat{U}_R'\hat{U}_R-\hat{U}_1'\hat{U}_1\right)/n_2}{\hat{U}_1'\hat{U}_1/(n_1-k)}\sim F_{n_2,n_1-k}\ldots(4.76)$$

وهو الإختبار المتكافئ مع ذلك الموجود بالمعادلة (54.4) والمسمى بإختبار التنبؤ.

ومنه نقول:

a) لما $n_2 > k$ نفضل إستعمال إختبار التغير الهيكلي بالمعادلة (75.4).

b) لما $n_2 \leq k$ نفضل إستعمال إختبار التنبؤ بالمعادلة (76.4)

c) وعادة مايكون إختبار التغير الهيكلي أقوى من إختبار التنبؤ لأنه يستعمل كل المعلومات الموجودة بالعينتين في ثلاثة إنحدارات منفصلة ومتتالية. بينما يستعمل إختبار التنبؤ إنحدارين منفصلين فقط.

5-4 المتغيرات الوهمية Dummy variables

تعاملنا لحد الآن مع المتغيرات المقاسة كميا، مثل الإستهلاك، الدخل، الأسعار وغيرها. كل المتغيرات السالفة الذكر يمكن قياسها بالحجم أو بوحدات نقدية بينما هناك متغيرات إقتصادية أخرى لايمكن قياسها بالطريقة المذكورة، وإنما بنسب مئوية مثل معدل الفائدة، البطالة، التضخم وغيرها. كما أننا قد نكون مهتمين في بعض الأحيان بمتغيرات إقتصادية لاتنتمي إلى المثالين المذكورين أعلاه، مثل دالة الإنتاج خلال المواسم الأربعة للسنة، أو دالة الإستهلاك خلال فترة الحرب وفترة السلم، أو إستهلاك لحم الخنزير في الدول المسيحية بالمقارنة مع الدول الإسلامية وغيرها. ويمكن تسمية هذه التصرفات الإقتصادية بالمتغيرات الكيفية أو النوعية Qualitative Variables، أي المتغيرات التي لاتحتوي على ميزان طبيعي للقياس.

ولنأخذ أمثلة عن ذلك. ففي تحليل السلاسل الزمنية لدالة الإستهلاك لأفراد المجتمع الجزائري، يمكن أن ننظر للإنفاق الإستهلاكي بأنه لايعتمد على الدخل الفردي المتاح فقط. بل يمكن أن يعتمد على الظروف التي تمر بها البلاد. هل هي فترة رخاء إقتصادي أم كساد إقتصادي؟ - هل الفترة المدروسة هي فترة إقتصاد مخطط أو إقتصاد مفتوح لحرية المنافسة الدولية والمحلية. حيث خلال فترة فرض سياسة تجارية وحمائية صارمة على الواردات من السلع والخدمات الأجنبية. نتوقع أن يكون مستوى الإستهلاك منخفضا عن فترة سياسة السوق المفتوحة والحرة مهما كان مستوى دخل الأفراد.

وفي دراسة تحليلية لبيانات مقطعية نتوقع كذلك بأن يكون نوع ومستوى إستهلاك عوائل المدينة مختلفا عن نوع ومستوى إستهلاك عوائل الريف مهما كان مستوى دخل الأفراد كذلك. لأن التصرف الإستهلاكي يختلف لدى النوعين من أفراد المجتمع. وبسبب كل هذه الفروقات يمكن إدخال هذه المتغيرات الإقتصادية وغير الإقتصادية في شكل متغيرات وهمية لنمذجة الأثار التي نريد إختبارها.

1-5-4 تغير الحد الثابت:

لنأخذ دالة الإستهلاك الكينزية. ونفترض مبدئيا، أن متغيرنا النوعي (الوهمي) يؤثر على الحد الثابت ولايؤثر على ميل العلاقة (الميل الحدي للإستهلاك) ولنأخذ مثالا عن أثر سياسة فتح السوق الوطنية لبعض المنتجات الأجنبية بداية من سنة 1979 في تغير مستوى الإستهلاك لدى أفراد المجتمع الجزائري. فإذا كتبنا معادلة الإستهلاك على الشكل:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad ; \quad t = 1967, \ldots 1989.$$

حيث أن تغير الإستهلاك الفردي Y_t في الفترة t محدد بواسطة تغير مستوى الدخل الفردي X_t في نفس الوقت. ولنفرض أن فرض سياسة تعويم السوق الوطنية بالمنتجات الأجنبية سوف تزيد من كمية الإستهلاك ولكنها لاتغير من أثر

الدخل X_t في الإستهلاك Y_t. أي أن تطبيق هذه السياسة لايؤثر على β_2. ونكتب دالة الإستهلاك من جديد على الشكل:

$$I: \quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 D_t + u_t ......(4.77)$$

$$t = 1967,.....89.$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{فترة تطبيق السياسة} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases} ......(4.77)'$$

نسمي D_t بالمتغير الوهمي (أو المتغير المؤشر). ويكـون شـرح المعادلـة هـو أنـه خلال الفترات التي لاتطبق فيهـا سياسـة التعويم $(D_t = 0)$ تكون العلاقة مـابين الإستهلاك والدخل كمايلي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad : \quad t = 1967,.....1978....(4.78)$$

أما خلال فترات إدخال هذه السياسة الإقتصادية $(D_t = 1)$ تكون المعادلة كمايلي:

$$Y_t = (\beta_1 + \beta_3) + \beta_2 X_t + u_t \quad : \quad t = 1979,.....89....(4.79)$$

حيث أن الزيادة حدثت بسبب تغير القيود وليس بسـبب زيـادة الدخل ومنه نتوقع أن تكون قيمة β_3 موجبة. ونقدر المعالم بنفس الطريقة المعروفة (المربعـات الصغرى العادية). كأن D_t هو متغير مستمر. ونلاحـظ أنـه بالإضافـة إلـى فرضية تسـاوي الميلين الحديين للإسـتهلاك فـي الإنحداريـن (78.4) و (79.4). يجـب أن نفترض بأن النموذج (77.4) هو معادلة في شكل مختصر وعلـى الخصـوص أن D_t هو متغير خارجي exogenous. وهذا يعني أن مستوى إستهلاك الأفـراد Y_t لايؤثر على قرار المخطط أو مسؤول الحكومة في إتخاذ قرار تعويم السوق الوطنيـة أم لا. كما نفترض كذلك بأن أثر سياسة التعويم على الإستهلاك تبقى ثابتـة خـلال كل مدة

القرار المتخذ أي خلال (1979-1989). ولشرح المعادلات المقدرة مع المتغيرات الوهمية، نفترض النتائج التالية:

$$\hat{Y}_t = 12 + 0,9X_t + 8D_t \ldots (4.80)$$

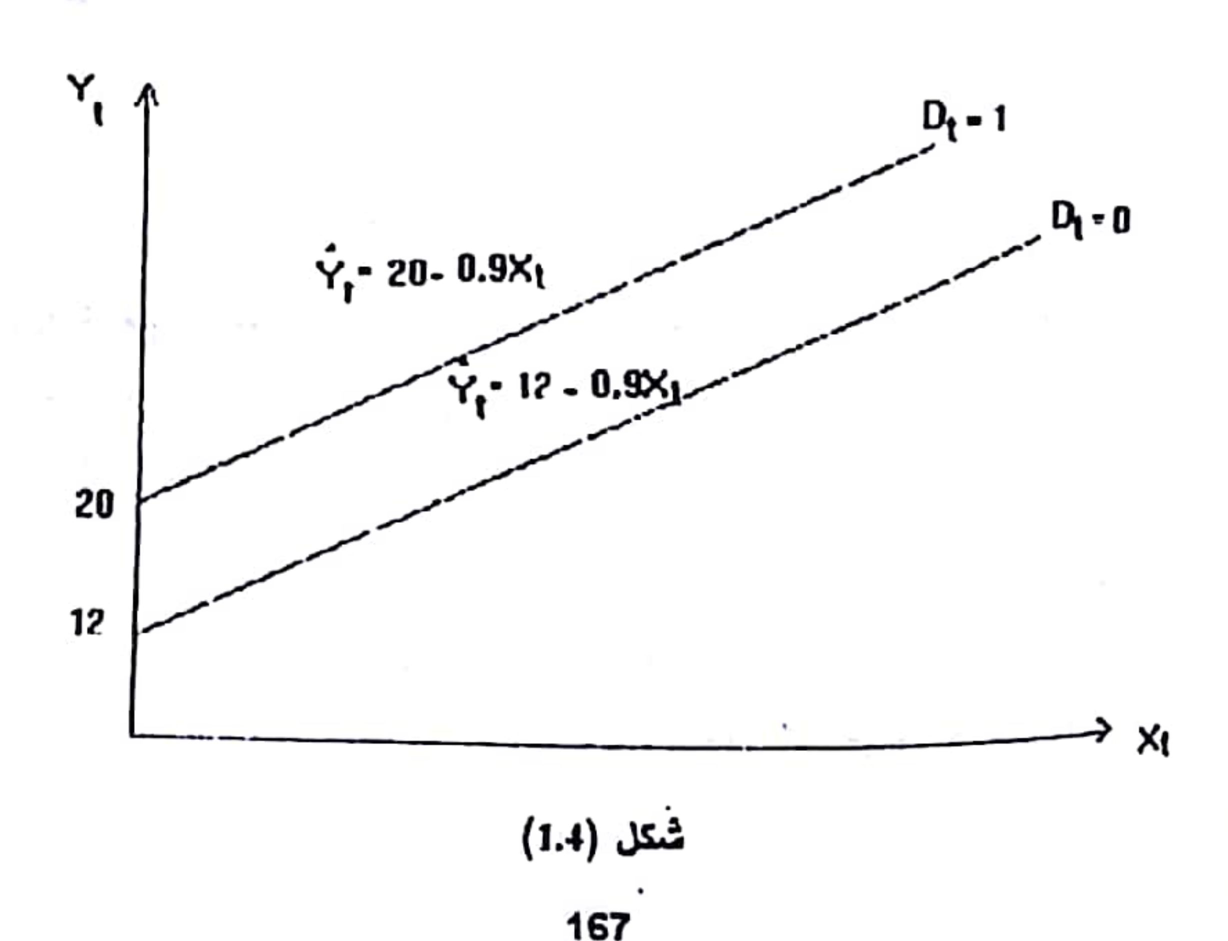
$$S.E \quad (2) \quad (0,1) \quad (2,0)$$

ومن القيمة $SE(\hat{\beta}_3) = 2$ نلاحظ أن الفرضية $H_0: \beta_3 = 0$ مرفوضة. ونستخلص أنه خلال فترة تطبيق سياسة التعويم بالمنتجات الأجنبية كان الأثر إيجابيا على تغير الإستهلاك. إن المعادلة التقديرية للإستهلاك هي:

$: \hat{Y}_t = 12 + 0,9X_t \quad : t = 67, \ldots 78 \quad \ldots (4.81)$ عدم تطبيق السياسة

$: \hat{Y}_t = 20 + 0,9X_t \quad : t = 79, \ldots 89$ تطبيق السياسة

ونوضح سياسة تعويم السوق الوطنية في الشكل (1.4) التالي:



شكل (1.4)

4-5-2 إختلاف الميل وعدم تغير الحد الثابت:

لنأخذ الان الحالة المتعددة، حيث نفترض بأن سياسة التعويم تؤثر على الميل الحدي للإستهلاك عوضا عن الحد الثابت. ونكتب في هذه الحالة معادلة الإنحدار لدالة الإستهلاك على النحو:

$$II: \quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 (X_t D_t) + u_t \ldots\ldots (4.82)$$

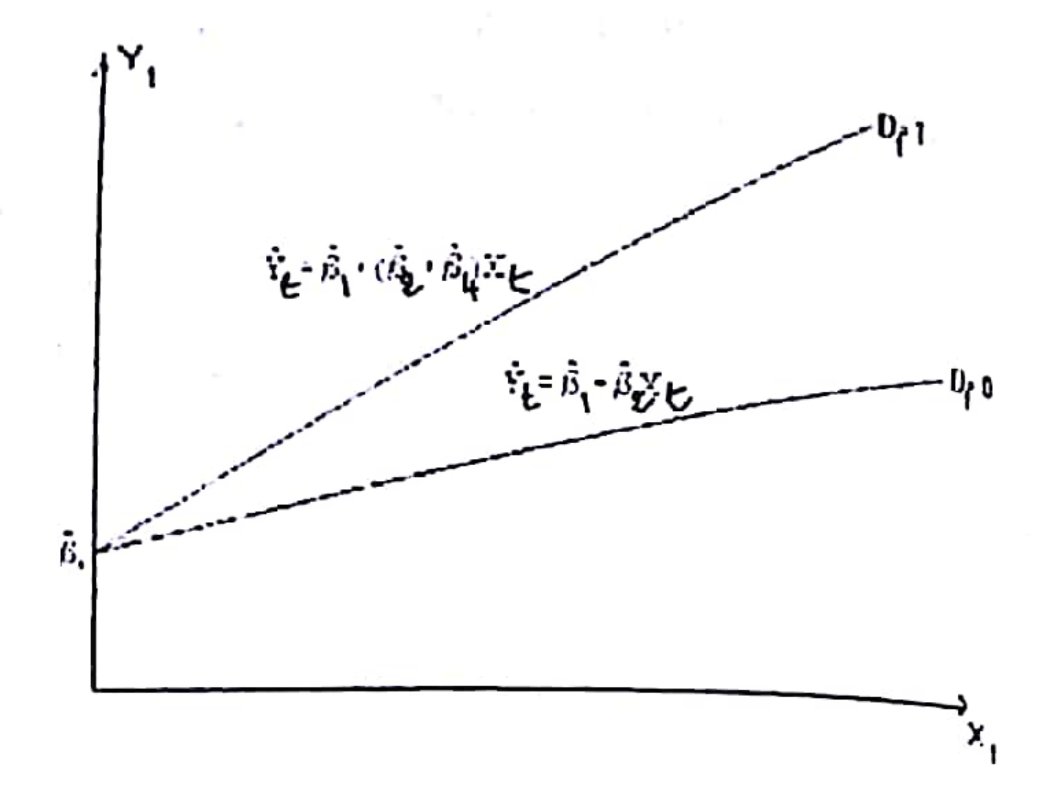
ويسمى D_t هنا بالمتغير الوهمي المتعدد. ويبقى معرفا كمالي '(77.4).
ويصبح شرح المعادلة (82.4) هو أنه من خلال الفترات التي لاتطبق فيها سياسة التعويم ($D_t = 0$) تكون العلاقة بين X_t و Y_t كما في (78.4). بينما خلال الفترة التي نطبق فيها هذه السياسة (1979-1989). $D_t = 1$. فهي:

$$Y_t = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) X_t + u_t \ldots (4.83)$$

مثلما سبق، نقدر المعادلة (82.4) بواسطة المربعات الصغرى وكأن D_t متغير مستمر. كما أننا نأخذ العبارة $X_t D_t$ كأنها متغير منفصل حيث يأخذ القيم التالية:

$$X_t D_t = \begin{cases} X_t & : D_t = 1 \\ 0 & : D_t = 0 \end{cases}$$

حيث نتوقع أن يكون β_3 موجبا. وتكون المعادلة التقديرية للإستهلاك مبينة في الشكل (2.4) أدناه:



شكل (2.4)

3-5-4 الحالة التوفيقية

لنوفق الآن الحالتين السابقتين في نفس المعادلة. ونفرض أن كلا من الحد الثابت (حد الكفاف) والميل الحدي للإستهلاك للعلاقة يكونان مختلفين خلال الفترتين الزمنيتين (67-78). (79-89). أي لفترة تطبيق سياسة التعويم ولفترة عدم تطبيقها. ثم نكتب معادلتنا المناسبة لهذه الحالة على الشكل:

$$\text{III}: \quad Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 D_t + \beta_4 (X_t D_t) + u_t \ldots (4.84)$$

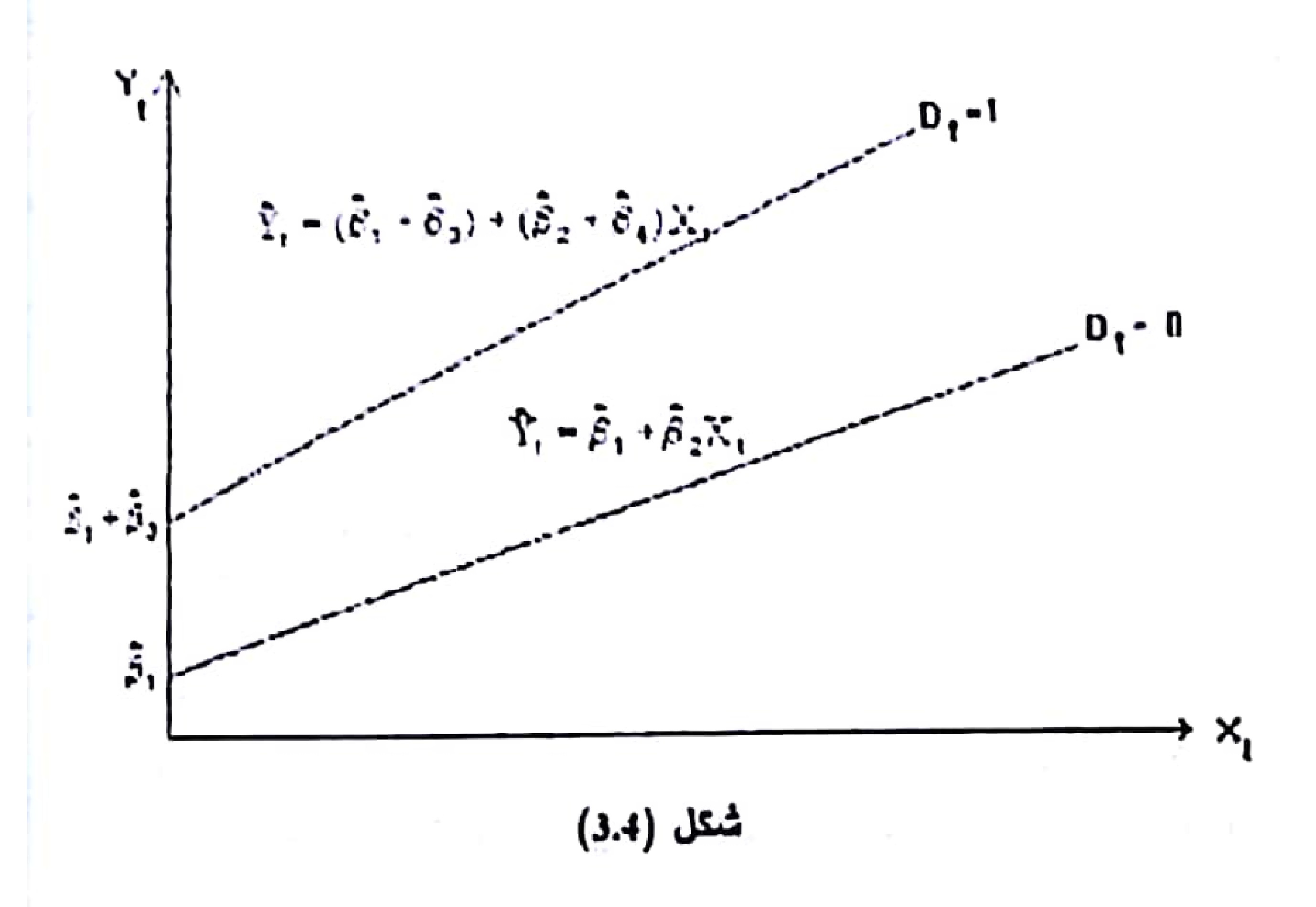
حيث لما نكون خارج فترة تطبيق السياسة (67-78). $D_t = 0$. فإن المعادلة (84.4) تصبح في صيغة النموذج (78.4). بينما خلال فترة تطبيق السياسة. $D_t = 1$. فإن النموذج (84.4) يأخذ الشكل:

$$Y_t = (\beta_1 + \beta_3) + (\beta_2 + \beta_4)X_t + u_t : t = 79, \ldots 89; \ldots (4.85)$$

وبتطبيق قانون المربعات الصغرى على المعادلة (84.4). خلال فترة تطبيق السياسة نحصل على:

$$\hat{Y}_t = (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3) + (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_4)X_t \ldots (4.86)$$

ونتوقع من $\hat{\beta}_3$ و $\hat{\beta}_4$ أن يكونا موجبين. وتظهر العلاقة مابين الفترتين كما في الشكل (3.4):



شكل (3.4)

ومادام كنا قد إفترضنا بأن كلا من الحد الثابت والميل مختلفان خلال الفترتين المذكورتين. فإننا نستطيع فصل العينة (n=23) إلى عينتين مختلفتين. تحتوي الأولى $n_1 = 12$ على الفترة (67-78). والثانية $n_2 = 11$ على الفترة (79-89). لنكون في الأخير إنحدارين مختلفين كمايلي:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_t : D_t = 0$$

.....(4.87)

$$\hat{Y}_t = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 X_t : D_t = 1$$

ومنه نلاحظ أن الطريقتين تعطيان مقدرات متكافئة حيث:

$$D_t = 0 \quad n_1 = 12 \quad \begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_2 \end{cases}$$

$$D_t = 1 \quad n_2 = 11 \quad \begin{cases} \hat{\gamma}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 \\ \hat{\gamma}_2 = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_4 \end{cases}$$

نجد أن:

$$\hat{\beta}_3 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{\beta}_4 = \hat{\gamma}_2 - \hat{\alpha}_2$$

لتصبح المعادلة التقديرية للنموذج (84.4) على الشكل:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_t + (\hat{\gamma}_1 - \hat{\alpha}_1) D_t + (\hat{\gamma}_2 - \hat{\alpha}_2)(X_t D_t) \ldots (4.88)$$

وتعتبر المعادلة (88.4) متماثلة مع حاصل ضرب المعادلة الثانية (87.4) بواسطة D_t. مضافا إليها حاصل ضرب المعادلة الأولى لـ (87.4) بواسطة $(1 - D_t)$ أي:

$$(1 - D_t) \quad \hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_t \quad : t = 67, \ldots 78$$

$$(D_t) \quad \hat{Y}_t = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 X_t \quad : t = 79, \ldots 89$$

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_t + (\hat{\gamma}_1 - \hat{\alpha}_1) D_t + (\hat{\gamma}_2 - \hat{\alpha}_2)(X_t D_t)$$

وإذا كنا مهتمين بإختبار التحركات Shifts في خط الإنحدار والموجودة بالشكل (3.4)، يكون تقدير العينة الكلية n=23 هو الطريقة الصحيحة مادامت تعطي مقدرات مباشرة لتحرك الحد الثابت β_3، وتحرك الميل β_4. أما إذا كنا مهتمين بالمعادلتين

الخاصتين بالفترتين المختلفتين، يكون تقدير العينتين المنفصلتين $n_1 = 12$، $n_2 = 11$ هو الأحسن. وتبقى نتائجنا المتحصل عليها، صحيحة لما نوسع هذه الطريقة إلى نموذج يحتوي على عدة متغيرات مستقلة.

وإذا أخذنا الحالات الثلاثة السابقة الذكر في شكل مصفوفات تكون على الشكل التالي:

$$\text{I}:\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_1 & 0 \\ i_2 & X_2 & i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + U....(4.89)$$

النموذج (77.4)

حيث أن i_1 هي $n_1 \times 1$ و i_2 هي $n_2 \times 1$ لعناصر الواحد. أما X_1 و X_2 فتشيران إلى فترة عدم تطبيق السياسة (67-78) وفترة تطبيق السياسة (79-89) على الترتيب. أما النموذج الثاني بالمعادلة (82.4) فيكتب:

$$\text{II}:\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_1 & 0 \\ i_2 & X_2 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + U..(4.90)$$

النموذج (82.4)

أما الحالة التوفيقية فتعطي:

$$\text{III}:\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 & X_1 & 0 & 0 \\ i_2 & X_2 & i_2 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + U...(4.91)$$

نموذج (84.4)

وبتقدير النماذج (89.4)،(90.4)، (91.4) نحصل على نفس النتائج المحصلة في الأشكال (1.4)، (2.4)، (3.4) على الترتيب.

4-5-4 المتغيرات الوهمية كمتغيرات مستقلة وحيدة:

بالرغم من أن المعادلات المحتوية على المتغيرات الوهمية فقط صعبة التفسير، فإن إهتماما بسيطا من طرفنا حول هذه المعادلات يساعدنا على فهم وشرح معالم المتغيرات الوهمية في المعادلات التي تحتوي أيضا على متغيرات وهمية. ولنعتبر الحالة البسيطة التي تحتوي على متغير مستقل واحد (متغير وهمي واحد). حيث نفرض أنه لدينا عينة بيانات مقطعية للأفراد بعضهم له مستوى الباكالوريا أو مايعادلها، والبعض الآخر ليس له هذا المستوى. ولنعرف Y_i كمعدل شهري لمدخول الفرد i، ونعرف:

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الفرد } i \text{ له مستوى البكالوريا} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ولنعتبر معادلة الإنحدار التالية:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + u_i \ldots (4.92)$$

ولتكن $\overline{Y}$ هي وسط المداخيل الشهرية لأفراد العينة ذات مستوى بكالوريا ومايعادلها أما $\overline{Y}_0$ فهي وسط المداخيل الشهرية لأفراد العينة غير المتحصلين على البكالوريا. لتكون مقدرات المربعات الصغرى هي:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y}_0 \ldots D_i = 0$$

$$\hat{\beta}_2 = \overline{Y} - \overline{Y}_0 \ldots D_i = 1$$

حيث نلاحظ أن معامل المتغير الوهمي هو ببساطة عبارة عن الفرق في وسط المداخيل بين المجموعتين من الأفراد. أما إذا أعتبرنا عدة عوامل أخرى مثل ذوي الشهادات الجامعية، ذوي مستوى البكالوريا، وذوي شهادات أقل من البكالوريا، فإنه يمكننا إظهار أثر المداخيل الشهرية بوضع متغيرين وهميين:

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الفرد } i \text{ له البكالوريا كأعلى مستوى} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الفرد } i \text{ له شهادة جامعية} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

- ولنعتبر الإنحدار التالي:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 D_{2i} + u_i \ldots (4.93)$$

$$Y = D.\beta + U$$

حيث يكون موجه المصفوفة على الشكل: $D = [i \quad D_1 \quad D_2]$

وموجه المعالم هو: $\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]$

ولتكون مصفوفة البيانات D على الشكل:

$$D = \begin{bmatrix} i_0 & 0 & 0 \\ i_1 & D_1 & 0 \\ i_2 & 0 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 & 0 & 0 \\ i_1 & i_1 & 0 \\ i_2 & 0 & i_2 \end{bmatrix}$$

لأن D تأخذ القيمة واحد أو الصفر. كما أن i هو موجه عمود من الواحد ويأخذ الشكل:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \\ \cdots \\ i_1 \\ \cdots \\ i_2 \end{bmatrix}$$

ثم إن i_0 تناسب عينة الأفراد n_1 بمستوى دون البكالوريا. أما i_1 فتناسب عينة الأفراد n_2 مستوى البكالوريا. بينما n_3 بمستوى جامعي. وتكون:

$$D'D = \begin{bmatrix} n & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_2 & 0 \\ n_3 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad , \quad D'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_0 + \sum Y_1 + \sum Y_2 \\ \sum Y_1 \\ \sum Y_2 \end{bmatrix}$$

حيث أن: Y_0 هي المداخيل الشهرية لعينة الأفراد دون مستوى البكالوريا

Y_1 هي المداخيل الشهرية لعينة الأفراد بمستوى البكالوريا

Y_2 هي المداخيل الشهرية لعينة الأفراد بمستوى جامعي.

وإذا كانت $\bar{Y}_0$، $\bar{Y}_1$، $\bar{Y}_2$، هي أوساط القيم Y_0، Y_1، Y_2 على الترتيب، فإن تطبيق قانون المربعات الصغرى على النموذج (93.4) يعطي النتائج التالية:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 \\ \bar{Y}_2 - \bar{Y}_0 \end{pmatrix} \ldots.(4.94)$$

5-5-4 المتغير الوهمي كمتغير تابع:

لنعتبر المعادلة التالية:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \ldots.(4.95)$$

حيث أن X_i هي دخل العائلة i، Y_i ملكية العائلة i لدفتر إدخار.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{لما العائلة } i \text{ تملك دفتر إدخار} \\ 0 & \text{العائلة } i \text{ لاتملك دفتر إدخار} \end{cases}$$

في هذه الحالة نواجه عدة مشاكل عند تطبيق قانون المربعات الصغرى ومنها:

د) أن الأخطاء u_i لاتتوزع طبيعيا ومعطاة بالعبارة:

$$u_i = Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i$$

حيث أن Y_i تأخذ فقط القيمتين واحد وصفر. ومنه من أجل أية قيمة لـ X_i.. لـ
u_i تساوي المقارين التاليين فقط:

$$u_i = \begin{cases} 1-\beta_1-\beta_2X_i & : \quad Y_i = 1 \\ -\beta_1 - \beta_2X_i & : \quad Y_i = 0 \end{cases}$$

وبالتالي نقول. بمعرفة قيم X_i و u_i يكون لهذه الأخيرة التوزيع الإحتمالي المتقطع التالي:

u_i	$pr(u_i)$
$1-\beta_1-\beta_2X_i$	p_i
$-\beta_1-\beta_2X_i$	$1-p_i$

حيث أن p_i هي إحتمال إمتلاك العائلة i لدفتر إدخار بمعرفة دخلها X_i. ومنه نستنتج بأن توزيع u_i بمعرفة X_i يكون غير طبيعي.

b) المشكل الثاني هو مسألة الشرح والتنبؤ. إذ تأخذ Y_i القيمة واحد بإحتمال p_i والقيمة صفر بإحتمال $(1-p_i)$. ومنه نقول $E(Y_i) = p_i$. لتكون معادلتنا الخطية $E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2X_i$ مشروحة كمعادلة إحتمالية ومجال قيمتها هو $[0.1]$.

وتكون مقدرتها هي $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2X_i$ والتي يمكن أن تأخذ قيما خارج المجال $[0.1]$ لأنها غير محددة.

c) إن الأخطاء u_i سوف تكون لها تباينات غير متجانسة. حيث من(b) أعلاه لدينا:

$$p_i = E(Y_i) = \beta_1 + \beta_2X_i$$

وتكون لها قيمتين ممكنتين. وبمعرفة X_t، u_t فإن تباينات الأخطاء سوف تعتمد على X_t. وبسبب هذه المشاكل لايمكن تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية. على هذا النموذج الخطي. فإما أن نجري بعض التغييرات أو نختار طريقة أخرى للتقدير. وسوف نتطرق لها بالتفصيل عند مناقشتنا لموضوع المتغيرات التابعة والنكيلية في فصول أخرى.

6-5-4 إستعمال المتغيرات الوهمية للتعديل الموسمي:

تلعب المتغيرات الوهمية دورا مهما في مشاكل التعديل الموسمي. إذ أن عدة بيانات إقتصادية للسلاسل الزمنية تبين تذبذبات موسمية. فمثلا الإنتاج الصناعي لعدة مؤسسات إنتاجية ينخفض عادة في الربع الثالث من السنة بسبب أخذ العمال لعطلهم الصيفية. كما أن إستهلاك أنواع معينة من العصير ينخفض في الربع الأول من السنة في البلدان المتوسطية كالجزائر. بسبب إنخفاض درجات الحرارة. وهناك طريقتان أساسيتان للأخذ بعين الإعتبار هذه التذبذبات الموسمية عند تقدير العلاقات الإقتصادية من هذا النوع. تتمثل الطريقة الأولى في إزالة العامل الموسمي للبيانات قبل تقديرها Deseasonalising data. أما الطريقة الثانية فهي إستعمال متغيرات وهمية خاصة خلال التقدير. ونظرا للعيوب التي تنتج عن الطريقة الأولى [6]. فإن الطريقة الثانية (إدخال متغيرات وهمية) هي الحل الأمثل لتحاشي عيوب الطريقة الأولى. فإذا كانت لدينا المتغيرات الوهمية التالية:

$$D_{it} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الملاحظة } t \text{ تنتمي إلى الربع } i \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ومنه فإن المتغيرات الأربعة (D_{1t}، D_{2t}، D_{3t}، D_{4t}) تضاف للمعادلة الخاصة

---

[6] - أنظر:

Mark B Stewart and K.F Wallis

"Introductory Econometrics". Basil Black-Well publishing OXFORD. Page 1"9. 1981

بالإنحدار المدروس. فمثلا عند تقدير دالة الإستهلاك البسيطة وأخذ التذبذبات الموسمية بعين الإعتبار. يمكن أن نقدر النموذج:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + u_t \quad ..(4.96)$$

إن إدخال المتغيرات الوهمية الأربعة بهذه الطريقة يعني أننا افترضنا بأن التذبذبات الموسمية في الإستهلاك تؤثر فقط على الحد الثابت في العلاقة المدروسة. وهي الحالة المذكورة بالشكل (1.4). حيث نفرض، مثلا، أن الميل الحدي للإستهلاك β_2 هو نفسه عبر المواسم. أما إذا سمحنا لمكونات الموسم D_{it} بالتأثير على الميل الحدي للإستهلاك، فيجب علينا إدخال المتغيرات الوهمية المتعددة والموجودة بالمعادلة (82.4) والمبينة بالشكل (2.4)، ولكن تكون هنا بشكل معقد أكثر.

إن السؤال المطروح هنا هو كيف تكون المقدرات المحصلة من إدخال المتغيرات الوهمية الموسمية بالمقارنة مع تلك المحصلة من إزالة عنصر الموسم في البيانات أو البيانات المعدلة. ولنفرض أننا حصلنا على السلسلة "المعدلة الموسم" لكل من الإستهلاك Y_t والدخل X_t ونسميها $\tilde{Y}_t$ و $\tilde{X}_t$ على الترتيب. ومن ثم نقدر الإنحدار التالي:

$$\tilde{Y}_t = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{X}_t + \varepsilon_t \quad ....(4.97)$$

ثم نتساءل كيف تكون قيمة $\hat{\alpha}_2$ بالمقارنة مع قيمة $\hat{\beta}_2$ بالمعادلة (96.4). حيث من خصائص الإنحدار الجزئي بالمعادلة (73.3). بالفصل الثالث، يمكن القول بأنه إذا كانت البيانات "المعدلة الموسم" محصلة من تحديرها في المتغيرات الوهمية الموسمية D_{it}، فإن المعادلتين (96.4) و (97.4) تعطيان النتيجة $\hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_2$ أي نفس الميل الحدي للإستهلاك. ولتوضيح ذلك، نعتبر المعادلة (96.4) في شكل مصفوفات على النحو:

$$Y = X\beta + D\gamma + U \quad ....(4.98)$$

حيث أن:

$$D = [D_{1t}, D_{2t}, D_{3t}, D_{4t}] \quad , \quad X = [i \;\vdots\; X_t]$$

$$t = 1, 2, ..., n$$

ومنه يكون النموذج التقديري للمعادلة أعلاه هو:

$$Y = X\hat{\beta} + D\hat{\gamma} + e....(4.99)$$

وهو إنحدار قيم Y غير المعدلة في قيم X غير المعدلة ومجموعة المتغيرات الوهمية والموسمية D_n. فإذا كتبنا النموذج التقديري أعلاه في صيغته المجزأة التالية:

$$Y = [X \;\vdots\; D]\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \cdots \\ \hat{\gamma}\end{bmatrix} + e = Z\hat{\delta} + e$$

ليكون موجه المقدرات $\hat{\delta}$ على النحو:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\gamma}\end{bmatrix} = (Z'Z)^{-1}Z'Y = \begin{bmatrix}X'X & X'D\\ D'X & D'D\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}X'Y\\ D'Y\end{bmatrix}...(4.100)$$

وبتطبيق القانون العام لمعكوس المصفوفة، يكون العنصر الأول في المصفوفة $(Z'Z)^{-1}$ هو على الشكل:

$$\left(X'X - X'D(D'D)^{-1}D'X\right)^{-1} = \left(X'M_DX\right)^{-1}$$

$$M_D = I - D(D'D)^{-1}D'$$

وتكون المصفوفة M_D متناظرة وخاملة لتحقق الخاصية $M_DD = 0$. أما العنصر الموجود بالسطر الأول والعمود الثاني للمصفوفة $(Z'Z)^{-1}$ فهو: $-\left(X'M_DX\right)^{-1}X'D(D'D)^{-1}$. ليكون موجه المقدرات $\hat{\beta}$ هو:

$$\hat{\beta} = \left(X'M_DX\right)^{-1}X'Y - \left(X'M_DX\right)^{-1}X'D(D'D)^{-1}D'Y$$

$$\hat{\beta} = \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DY....(4.101)$$

لنعرف الآن المتغيرات المعدلة (المحولة) على الشكل:

$$\tilde{Y} = M_D Y \quad , \quad \tilde{X} = M_D X .....(4.102)$$

إن $\tilde{Y}$ هو موجه بواقي إنحدار المربعات الصغرى والمحصل من تحدير Y في المتغيرات الوهمية والموسمية D_{ii} أي:

$$\tilde{Y} = Y - D\hat{\theta} = Y - D(D'D)^{-1}D'Y = M_D Y$$

$$\hat{\theta} = (D'D)^{-1}D'Y$$

كما أن كل عمود من المصفوفة $\tilde{X}$ هو عبارة عن موجه بواقي مربعات صغرى محصلة من تحدير المتغير X في D. ومنه نقول إذا حدرنا $\tilde{Y}$ "المعدلة" في $\tilde{X}$ "المعدلة" كما في المعادلة (97.4) فإن موجه المقدرات المناسب لذلك هو:

$$\hat{\theta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{Y} = (X'M_D X)^{-1}X'M_D Y = \hat{\beta}$$

ومنه نصل إلى النتيجة المحصلة في الفصل الثالث بالمعادلة (79.3). ونقول أنه إذا جزئنا المتغيرات المستقلة في أي إنحدار إلى كتلتين من المتغيرات المستقلة مثل $[X \;\vdots\; D]$. فإن مقدرات المعالم لكتلة المتغيرات المستقلة هي نفسها، سواءا، حدرنا Y في كل من X و D أو بتعديل Y و X. وتحدير كل منهما في D على إنفراد. ثم إذا حسبنا الإنحدارين التقديرين:

$$Y = X\hat{\beta} + D\hat{\gamma} + e$$

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\hat{\theta} + V$$

فإن: $$\hat{\beta} = \hat{\theta} .....(4.103)$$

كما يستخلص الباحث Lovell [7] نتيجتين مهمتين بالإضافة إلى النتيجة الموجودة بالمعادلة (103.4) وهي أن تحدير Y أولا في $\tilde{X}$. وثانيا في كل من $\tilde{X}$ و D تعطيان موجهي مقدرات مساويين للموجهين المحصل عليها بالمعادلة (103.4)

---

[7] - أنظر:

- J Johnston "Econometric Methods" MC Graw Hill inc, Page 238 London 1984

حيث أن تحدير المعادلتين:

$$Y = \bar{X}\hat{\alpha}_1 + V_1 .....(4.104)$$

$$Y = \bar{X}\hat{\alpha}_2 + D\hat{\gamma}_2 + V_2 .....(4.105)$$

حيث أن V_1 ، V_2 هي بواقي الإنحدار. فمن المعادلة (104.4) نجد:

$$\hat{\alpha}_1 = (X'M_D X)^{-1} X'M_D Y = \hat{\beta}$$

أما من المعادلة (105.4) نجد:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'M_D X & X'M_D D \\ D'M_D X & D'D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'M_D Y \\ D'Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X'M_D X)^{-1} X'M_D Y \\ (D'D)^{-1} D'Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix}$$

لأن $M_D D = 0$

6-4 التعدد الخطي Multicolinearity

إن الشرط الاهم لتطبيقات المربعات الصغرى هو أن المتغيرات المستقلة ليست مرتبطة خطيا تماما أي أن $r_{X_i X_j} \neq 0$ [8] ، أو لاتوجد أية علاقة خطية صحيحة فيما بين متغيرين مستقلين أو أكثر. كما أن الفرضية الخاصة بالمصفوفة X بالنسبة للنموذج الخطي العام بالمعادلة (26.3) تتطلب أن تكون رتبة X مساوية لـ k. أما إذا كان على الأقل هناك عمودين من X مرتبطين خطيا، تصبح $Rank(X) < k$. في هذه الحالة يطرح مشكل التعدد الخطي. يستعمل مفهوم التعدد الخطي للإشارة إلى وجود العلاقات الخطية فيما بين المتغيرات المستقلة. فإذا

8- أن $r_{X_i X_j}$ هو معامل الإرتباط البسيط مابين المتغيرين المستقلين X_j و X_i حيث أن $i \neq j$ وكذلك $i,j = 1,2,....k$

كان الإرتباط من النوع $r_{X_i X_j} = 1$، تصبح المعالم غير محددة. ويصبح من المستحيل الحصول على قيم عددية لكل معلمة على إنفراد. ومنه يتعذر علينا تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية. أما إذا كانت المتغيرات المستقلة غير مرتبطة أصلا فيما بينها، $r_{X_i X_j} = 0$، تكون المتغيرات المعنية متعامدة أي $\frac{1}{n}\sum x_i x_j = 0$. ومنه لا يوجد أي مشكل يذكر في تقدير المعالم.

ويشير Goldberger(9) بأنه في حالة تعامد المتغيرات المستقلة. لانحتاج إلى إجراء تحليل متعدد. إذ أن كل معلمة مقدرة $\hat{\beta}_i$ يمكن أن تقدر بواسطة إنحدار بسيط لـ Y في المحدر المناسب أي $Y=f(X_j)$.

لقد استعملت كلمة "التعدد الخطي" لأول مرة في أدبيات القياس الإقتصادي من طرف الباحث Ragnar Fisher سنة 1934 في كتابه تحت عنوان التحليل الترافدي أي Confluence Analysis.

عمليا، لا نتصادف مع الحالتين المذكورتين أعلاه (الإرتباط التام، أو التعامد). ففي أغلب الحالات، تكون هناك درجة معينة من الإرتباط فيما بين المتغيرات المستقلة بسبب تبعية التصرفات الإقتصادية لبعضها البعض عبر الزمن. ويكون في هذه الحالة لمعامل الإرتباط البسيط r ، مابين كل زوج من المتغيرات المستقلة، قيمة محصورة مابين الصفر والواحد. ويمكن لمشاكل التعدد أن تؤثر على دقة وإستقرار المعالم المقدرة، ولكن الآثار الحقيقية للتعدد الخطي لم تحدد نظريا بعد. إن التعدد الخطي ليس بشرط يجب توفره أو عدم توفره في الدوال الإقتصادية، وإنما هي ظاهرة تشوب معظم العلاقات تبعا للتصرفات الإقتصادية. ولا توجد أدلة قطعية (10) حول درجة التعدد الخطي التي تؤثر بوضوح على مقدرات المعالم، حيث

9- أنظر:

A. Goldberger. "Econometric Theory" John Wely. New York. Page 201, 1964

10- أنظر:

- A Koutsoyiannis : "Theory of Econometrics". Mac-Millan press L.T D. London. 1983 PP:233-252

يوجد إتجاه في المتغيرات الإقتصادية لأن تتحرك معا عبر الزمن، وتتأثر التصرفات الإقتصادية بنفس العوامل. فمثلا، في فترات الرواج أو النمو الإقتصادي السريع تنمو التصرفات الإقتصادية الأساسية رغم أن بعضها ينمو ضمنيا تحت غطاء بعض المتغيرات الأخرى. إن النمو وعوامل الإتجاه العام Trend هي إحدى الأسباب الرئيسية في بيانات السلاسل الزمنية، المسببة للتعدد الخطي. كما أن إستعمال القيم المؤخرة Lagged Values لبعض المتغيرات المستقلة منفصلة في العلاقة المدروسة يساعد على ظهور هذا المشكل. فالنماذج المؤخرة أعطت نتائج إيجابية في عدة ميادين من القياس الإقتصادي التطبيقي Applied Econometrics. وأصبح إستعمالها بشكل واضح في السنوات الأخيرة. فمثلا، في دوال الإستهلاك أصبح طبيعيا إدخال القيم السابقة للدخل والدخل الحالي (الجاري) مع المتغيرات المستقلة الأخرى في تحديد العلاقة.ومن ثم فإنه من الطبيعي أن تكون القيم المتوالية لمتغير معين مرتبطة فيما بينها، حيث يكون دخل الفترة الحالية، مثلا، محددا جزئيا بواسطة قيمته في الفترة السابقة وهكذا. نستنتج أن هناك درجة معينة من الإرتباط متوقعة الظهور في أغلب العلاقات الإقتصادية. ونشير إلى أنه بالرغم من أن التعدد الخطي، يكون، عادة، ملازما لبيانات السلاسل الزمنية، فإنه يمكن أن يظهر مع البيانات المقطعية. ولنفرض أننا نريد تقدير المعادلة التالية:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \ldots (4.106)$$

وإذا كانت $\lambda = X_{3t} / X_{2t}$، يكون أي تحرك للمتغير X_2 متبوعا بتحرك X_3، ولايمكننا فصل أثر X_2 على Y بدون المتغير X_3. وبالتعويض نجد:

$$Y_t = \beta_1 + (\beta_2 + \lambda\beta_3) X_{2t} + u_t \ldots (4.107)$$

ومنه نستطيع تقدير المقدار $(\beta_2 + \lambda\beta_3)$، ولايمكننا الفصل بين β_2 وβ_3 من أجل الحصول على مقدرتيهما المنفصلتين. أي إذا كانت رتبة X أقل من k. فإن المصفوفة $X'X$ تكون بدون معكوس، لأن محددها يساوي الصفر، ومنه

لا يمكن حساب مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ كما أشرنا لذلك من قبل وتسمى هذه الحالة بالتعدد الخطي التام أي $r_{X_i X_j} = 1$. ويأتي مشكل التعدد الخطي، كما ذكرنا، على عدة مستويات (درجات). وأبسط حالة يظهر بها هذا الأخير هي لما يكون أي متغيرين مستقلين مرتبطين بدرجة عالية ولكن ليست تامة. فإذا كان عمودان للمصفوفة X مرتبطين بدرجة عالية. يعني ذلك أن محدد المصفوفة $X'X$ سوف يكون قريبا من الصفر. ومنه تكون عناصر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ كبيرة جدا. ومن نتائج ذلك هو أن تباينات المقدرات $\hat{\beta}_j$ تكون كبيرة وبالتالي تكون أخطاؤها المعيارية كذلك كبيرة مادام:

$$SE(\hat{\beta}_j) = \hat{\delta}_e \sqrt{a_{jj}} \quad [11]$$

ومنه تكون $\hat{\beta}_j$ غير محددة بطريقة فعالة ومناسبة. كما أن الإحصاءة t تصبح صغيرة. ويمكن إستخلاص أن مؤشرات وجود التعدد الخطي هي قيمة كبيرة لمعامل التحديد R^2 مع مقدرات معالم مرفوضة المعنوية. وهذا يعني أن واحدا أو أكثر من المتغيرات المستقلة لها أثر منتظم في المتغير التابع، ولكننا لانستطيع معرفة أي واحد من هذه المتغيرات بالضبط. فلما ندخل متغيرا مستقلا للمعادلة بدون البقية. وتكون النتيجة إيجابية. بينما عند إدخال بقية المتغيرات تصبح معنوياتها الفردية مرفوضة. نستنتج أن هذا دليل على وجود التعدد الخطي. ويجب الإنتباه إلى أنه لايمكننا، دائما، إكتشاف التعدد الخطي بالإعتماد على معادلات الإرتباط الخطي الجزئية البسيطة فقط. ففي المعادلة (106.4) إذا كانت لدينا العلاقة $X_{3t} = X_{2t} + \beta_1$، نكون مع حالة التعدد الخطي التام. ومع هذا فإن معامل الإرتباط البسيط مابين X_{2t} و X_{3t} يمكن أن يكون منخفضا. كما يجب الملاحظة بأن الإرتباط مابين المتغيرات المستقلة هو معدل طبيعي وعادي وليس بمشكل. حيث في حالة غياب هذا الإرتباط تكون المصفوفة $X'X$ قطرية. ومنه تكون كل مقدرات

---

[11] - إن a_{jj} هي القطر j للمصفوفة $(X'X)^{-1}$ كما عرفناها بالفصل الثالث.

المعالم، للإنحدار المتعدد، عبارة عن مقدرات مجموعة إنحدارات بسيطة.

إذا كانت درجة إرتباط المتغيرات المستقلة لنموذج ما تنتمي للمجال $0 < r_{x_i x_j} < 1$، فإن أثر التعدد الخطي يكون غير واضح. حيث في بعض الأحيان، تكون قيم المعالم المقدرة غير مستقرة كلما أضفنا متغيرات مرتبطة خطيا بالدالة، أو كلما توسع حجم العينة. وفي أحيان أخرى لا تتأثر المعنوية الإحصائية لقيم المعالم المقدرة. كما أن قيم المعالم المقدرة تبقى دائما غير متحيزة إحصائيا حتى لما تكون درجة التعدد الخطي قوية. لأن الخاصية الإحصائية لعدم التحيز. بالنسبة لمقدرات المربعات الصغرى العادية، لا تتطلب بأن تكون قيم المتغيرات المستقلة، X، غير مرتبطة خطيا فيما بينها. بينما وجود التعدد الخطي يمكن أن يؤدي، عادة، إلى تغيرات كبيرة في قيم المعالم المقدرة (مثل تغير الإشارة). ويعتمد ذلك على أهمية ذلك المتغير المستقل والمعني بظاهرة التعدد الخطي. ويعلن الكاتب Klein[12] بأن الإرتباط الخطي ليس بمشكلة حقيقية. إلا إذا كانت قيمته عالية بالمقارنة مع درجة معامل التحديد المضاعف من خلال كل المتغيرات. آنيا. أي أن الإرتباط أو التعدد الخطي يسبب مشكلا عويصا إذا كانت:

$$r^2 x_i x_j \geq R^2 \text{ (13)}$$

4-6-1 إختبارات إكتشاف التعدد الخطي:

تعتمد درجة الخطورة لأثر التعدد الخطي على درجة الإرتباط الجزئي،ومعامل الإرتباط الكلي (أو معامل التحديد المضاعف). ومنه يمكن القول بأن

12- أنظر:

- L R Klein . "Introduction to Econometrics"
Prentice- Hall international, London, 1971. pp 64 and 101

13- أن $r\ x_i\ x_j$ هو معامل الإرتباط البسيط مابين X_i و X_j بينما R^2 هو معامل التحديد المضاعف مابين المتغير التابع Y_i وبقية المتغيرات المستقلة X_j: $J=1,2,\dots,k$

كلا من الأخطاء المعيارية، معاملات الإرتباط الجزئية $rxixj$ ، معا مل التحديد المضاعف R^2، يمكنها أن تستعمل لإختبار التعدد الخطي. لكن كل معيار من المعايير الثلاثة المذكورة ليس بمؤشر على وجود التعدد الخطي بمفرده. وذلك لأن القيم العالية للأخطاء المعيارية لا تظهر، دائما، بسبب التعدد الخطي وإنما يمكن أن تظهر لأسباب أخرى. كما أن الإرتباطات العالية فيما بين المتغيرات المستقلة لاتؤثر بالضرورة على قيم المقدرات $\hat{\beta}_j$. ومنه ليست هذه الاخيرة بمعيار مناسب لقياس وإكتشاف التعدد الخطي بمفردها. وبالمقابل يمكن لقيمة معامل التحديد المضاعف R^2 أن تكون عالية بالمقارنة مع $rXiXj$.

ورغم ذلك، من المحتمل، أن تحتوي نتائجنا على إشارات خاطئة أو على أخطاء معيارية كبيرة. ومع كل هذا، يمكن القول بأن توفيق المعايير الثلاثة. أعلاه، يساعدنا على إكتشاف التعدد الخطي.

4-6-1-1 طريقة التحليل الترافدي لـ Frisch:

وتكمن هذه الطريقة في تحدير المتغير التابع في كل متغير مستقل على حدى، ومنه نحصل على كل الإنحدارات الأولية. ثم نختبر نتائجنا الإحصائية بناءا على المعايير الإقتصادية المعروفة مسبقا. نختار الإنحدار الأولي الذي يعطي النتائج الأكثر مصداقية. ثم نضيف تدريجيا متغيرات أخرى ونختبر آثارها على كل من المعالم الفردية (أخطائها المعيارية، قيمة R^2). ويكون المتغير المضاف للإنحدار ذا معنوية إذا تحققت فيه الشروط التالية:

a) إذا حسن المتغير المستقل الجديد من R^2 بدون أن يجعل المعالم الفردية مرفوضة بطريقة خاطئة، نحتفظ بهذا المتغير ونعتبره كمتغير مستقل.

b) إذا لم يحسن المتغير الجديد من العلاقة ويؤثر على قيم المعالم الفردية، نعتبره مرفوضا ونحذفه من الإنحدار.

c) إذا أثر المتغير الجديد بشكل واضح على إشارات وقيم المعالم المقدرة، نعتبره متغيرا مفسرا. فإذا تأثرت المعالم الفردية بالطريقة التي تصبح فيها غير مقبولة على أساس الإعتبارات النظرية المعروفة مسبقا، فإنه يمكننا القول بأنه مؤشر على وجود التعدد الخطي بشكل معقد. يكون هذا المتغير مهما، لكن بسبب الإرتباطات الخطية مع المتغيرات المستقلة الأخرى، يكون أثره غير مقدر وغير معروف إحصائيا بواسطة المربعات الصغرى العادية، ولتحاشي تعقيدات التعدد الخطي والأخذ بعين الإعتبار أثر المتغير المفسر يجب علينا إتباع إحدى الحلول المذكورة بفقرة الحلول المقترحة للتعدد الخطي لاحقا. لأن حذف المتغير المفسر تماما من الإنحدار، لتحاشي أثره المضر على بقية المعالم، سوف يترك هذا الأثر ضمنيا على المعالم الأخرى (المتغيرات المستقلة الأخرى). وعلى الحد العشوائي (u_i) الذي يصبح، أتوماتيكيا، مرتبطا مع بقية المتغيرات المستقلة الأخرى في الدالة، وتصبح الفرضية $E(X_iu_i)=0$ غير صحيحة.

إن التحليل الترافدي لـ Frisch ينص على تقدير كل الإنحدارات الممكنة ما بين المتغيرات الموجودة بالعلاقة المدروسة. آخذين كل متغير، بالترتيب، كمتغير تابع وإعتبار كل الإنحدارات الممكنة لكل متغير في بقية المتغيرات، والتي ندخلها تدريجيا في التحليل. ومن الواضح أن التحليل الترافدي يتطلب منا حسابات كثيرة، ومنه تكون المقارنات مابين النتائج معقدة أكثر.

4-6-1-2 قياس التعدد الخطي أو شرط الاعداد Condition numbers

من نموذج الفصل الثالث بالمعادلة (1.3) لدينا:

$$var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{2i}^2(1-R_2^2)} \text{[14]} \ldots\ldots(4.108)$$

$$var(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{3i}^2(1-R_3^2)} \ldots\ldots(4.109)$$

$$cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2 R_2^2}{\sum x_{2i} x_{3i}(1-R_2^2)} \ldots\ldots(4.110)$$

حيث أن R^2_2 هو مربع معامل الإرتباط المتعدد مابين المتغيرين المستقلين X_{2I} و X_{3I}، بينما R^2_3 هو نفسه معامل الإرتباط المتعدد ولكن مابين X_{3I} و X_{2I} وهما في الأخير متساويان. أما عند توسيع النموذج (1.3) إلى k متغير مستقل $k > 2$ يصبح $R^2_J(J>2)$ على أنه مربع معامل الإرتباط المتعدد مابين المتغير المستقل X_J وبقية المتغيرات المستقلة الأخرى. ومنه يمكننا إستنتاج قانون عام لتباين المقدرات الفردية لموجه معالم الإنحدار الخطي كما يلي:

$$var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{ji}^2(1-R_j^2)} ; j = 1,2,\ldots,k \quad \ldots\ldots(4.111)$$

وتكون قيمة $var(\hat{\beta}_j)$ كبيرة كلما كانت:

a) σ_u^2 كبيرة

b) $\sum x_{ji}^2$ صغيرة

c) R_j^2 كبيرة

14- لاحظ أنه في حالة المعادلة (1.3) بالفصل الثالث فإنه يكون $R^2_2 = R^2_3$.

ومنه نعرف مقياسا جديدا يسمى "معامل تضخم التباين" Variance-Inflation factor (V.I.F)، ومقياسا آخر يسمى "شرط العدد" Condition number، وهما مقياسان يحددان درجة التعدد الخطي. ويعرف معامل تضخم التباين كمايلي:

$$V.I.F(\hat{\beta}_j) = \frac{1}{1-R_j^2} \ldots (4.112)$$

وبناءا على تعريف V.I.F أعلاه، تصبح المعادلة (112.4) على الشكل:

$$var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_{ji}^2} . V.I.F(\hat{\beta}_j) \ldots (4.113)$$

أي أن:

$$V.I.F(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum x_{ji}^2}{\sigma_u^2} . var(\hat{\beta}_j)$$

وإنطلاقا من الإنتقادات الموجهة لمعامل الإرتباط يكون مقياس VIF غير كاف لتحديد التعدد الخطي. ومنه نضيف مقياس شرط الأعداد المذكور من طرف Welsch 1980، والذي يقيس حساسية مقدرات الإنحدار للتغيرات الصغيرة في التباينات. ويعرف شرط الأعداد على أنه الجذر التربيعي لأكبر قيمة مقسمة على أصغر قيمة للقيم المميزة eigen values للمصفوفة $X'X$ وهو على الشكل:

$$k(X) = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}} (15)$$

فكلما كانت القيمة اعلاه أقرب إلى الواحد، كلما كان الشرط أفضل لعدم جدية التعدد الخطي، ومع هذا، فإن المقياسين المذكورين أعلاه ليسا كاملين. حيث أن القانون الموجود بالمعادلة (112.4) ينظر إلى الإرتباطات من خلال المتغيرات المستقلة فقط وهذا ليس بالعامل الوحيد. كما أن شرط العدد يمكن أن يتغير بإعادة تحويل

15- أنظر:

- J.Johnston "Econometric Methods" Mac Graw-Hill. London 1984. PP 249-250

المتغيرات المستقلة والتي ليست دائما صحيحة. ويصلح المقياسان (VIF وشرط العدد) للإستعمال عند حذ ف بعض المتغيرات وفرض قيود على المعالم فقط في الحالات التي يكون فيها $R_j^2 \approx 1$، أو لما تكون القيمة المميزة الصغيرة λ_{min} أقرب من الصفر. نقدر النموذج في هذه الحالة تبعا لبعض القيود المفروضة على معالمه. ويقترح(16) Theil مقياسا آخرا لقياس درجة الإرتباط فيما بين المتغيرات ومنه درجة التعدد الخطي على الشكل:

$$m = R^2 - \sum_{j=2}^{k}\left(R^2 - R_{-j}^2\right)....(4.114)$$

حيث أن R^2 هو معامل التحديد المضاعف المعروف من قبل، أما R_{-j}^2 فهو مربع معامل الإرتباط المتعدد من إنحدار y (المركزة) في $X_2, X_3, ..., X_k$ مع حذف X_j. لكن إحدى عيوب هذه الطريقة، هي انm يمكن أن تكون سالبة مما يجعل التحليل أصعب. وهناك من يقترح طرقا معينة لحل مشكلة التعدد الخطي كإضافة حد ثابت لتباينات مقدرات المعالم قبل حل المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى (17).

4-6-1-3 طريقة (18) Farrar-Glauber

لإكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع Farrar-Glauber الخطة التالية:

a) حساب مربع معامل الإرتباط المتعدد بالنسبة لكل المتغيرات المستقلة بالترتيب R_j^2.

16- أنظر:

- H. Theil "Principales of Econometrics". New York, Weily 1971. page 179

17- أنظر:

- G.S Maddala "Introduction to Econometrics": Mac Millan Publishing Company New York. 1988. Page 234.

18- أنظر:

- D.E. Farrar and R.R. Glauber "Multicollinearity in regression Analysis" Revue of Econometrics andStatistics, Vol 49, 1967, PP:92-207.

b) إختبار المعنوية الإحصائية لمعاملات الإرتباط المتعددة بواسطة التوزيع F كمايلي:

$$F = \frac{R_j^2/(k-1)}{(1-R_j^2)/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k} \ldots (4.115)$$

وتكون الفرضية المختبرة هي: $H_0: R_j^2 = 0; us: H_A: R_j^2 \neq 0$

فإذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من تلك المجدولة نقبل H_A ويكون المتغير X_j متعدد أو مرتبط خطيا. أما إذا حدث العكس نقبل H_0 ولايكون هناك أثر لتعدد X_j خطيا.

2-6-4 الحلول المقترحة للتعدد الخطي

عند وجود التعدد الخطي، فإن الحلول تكون معتمدة على إمكانية إيجاد مصادر أخرى للبيانات، وعلى أهمية العوامل التي تسببت في ظهورها، ثم على الهدف الذي من أجله نقوم بتقدير الدالة تحت الدراسة. فإذا لم يؤثر التعدد الخطي بشكل فعلي على مقدرات النموذج، يقترح بعض باحثي القياس الإقتصادي إهمال وجوده بالنموذج. حيث يمكن تحاشي التعدد الخطي بتوسيع حجم العينة، فمثلا، يمكن تحويل البيانات السنوية إلى بيانات موسمية أو شهرية إن أمكن ذلك. كما يمكن التخلص من التعدد الخطي بإسقاط (حذف) المتغير المسبب لهذا المشكل لكن هذه العملية يمكن أن تسبب مشاكل أخرى كما لاحظنا في فقرة "إضافة محدرات والحذف غير الصحيح لمحدرات". وهناك من يقترح (19) إدخال معلومات إضافية للنموذج.

19- أنظر:

- M.B. Stewart and K.F. Wallis "Introductory Econometrics" Basil Black Well. Oxford 1981, Page 153

- إن وجود التعدد الخطي يجعل من الصعب فصل آثار المتغيرات المختلفة ومنه نحتاج إلى معلومات خاصة تساعدنا على فصل أثر كل متغير لوحده. ويكون ذلك عن طريق فرض قيود على بعض المعالم بناءا على المعلومات المسبقة للنظرية الإقتصادية (أنظر فقرة القيود الخطية مثلا) ففي دالة كوب-دوغلاس للإنتاج. إذا عرفنا مرحلة الإنتاج التي تمر بها المؤسسة المعنية بالدراسة .يمكن للنظرية الاقتصادية ان تجبرنا على فرض قيود على المعاملات التقنية للإنتاج وفقا لثبات قانون الغلة. تزايدها أو تناقصها

3-6-4 مثال (1.4): طريقة Frisch لإكتشاف التعدد الخطي:

لدينا الجدول (1.4) أدناه مع بيانات السلاسل الزمنية للفترة 1959-1968. للإنفاق على الملابس (C). الدخل المتاح (Y). السيولة النقدية (L). مؤشر أسعار الملابس (P_c). و المؤشر العام للأسعار (P_0) في دولة ما (20).

20 مثال مأخوذ من كتاب A. Koutsoyiannis نظرية القياس الاقتصادي ص 240 - مرجع سابق.

السنوات	C (ع1)	Y (21)	L (ع1)	P_c 1963=100	P_o 1963=100
1959	8.4	82.9	17.1	92	94
60	9.6	88	21.3	93	96
61	10.4	99.9	25.1	96	97
62	11.4	105.3	29	94	97
63	12.2	117.7	34	100	100
64	14.2	131	40	101	101
65	15.8	148.2	44	105	104
66	17.8	161.8	49	112	109
67	19.3	164.2	51	112	111
68	20.8	184.7	53	112	111

-جدول (1.4)-

وبناءا على مقاييس النظرية الإقتصادية المعروفة مسبقا. يكون الإنفاق الإستهلاكي على الملابس متأثرا بكل العوامل المذكورة أعلاه. ومنه تكون دالة الطلب على الملابس كمايلي:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 L_t + \beta_4 P_{Ct} + \beta_5 P_{0t} + u_t$$

وبتطبيق قانون المربعات الصغرى العادية نجد:

ع1- الأرقام معطاة بملايين الجنيهات الإسترلينية

21- الأرقام معطاة بملايين الجنيهات الإسترلينية

ع1 الأرقام معطاة بملايين الجنيهات الإسترلينية

$$\hat{C}_t = -13.53 + 0.097Y_t + 0.015L_t - 0.199P_{ct} + 0.34P_{ot}$$

$$S.E \quad (7.5) \quad (0.03) \quad (0.05) \quad (0.09) \quad (0.15)$$

$R^2 = 0.998. \quad ESS = 28.15. \quad RSS = 0.33. \quad D-W = 3.4$

وإذا أردنا إختبار معنوية أميال الإنحدار. بتطبيق قانون التوزيع F. لتحليل التباين والمذكور بالمعادلة (71.3) بالفصل الثالث نجد:

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{28.15/4}{0.33/5} = 15.6 \sim F_{4,5}$$

ثم بالرجوع إل قيمة F المجدولة بمستوى معنوية $\% = 0.05$ يكون $F^* = 5.19$. أي القيمة المحسوبة أكبر من المجدولة ومنه نرفض H_0 ونقبل H_A التي تؤكد بأن المعنوية الكلية لأميال الإنحدار مقبولة إحصائيا. بينما نلاحظ أن كل المتغيرات المستقلة لها تعدد خطي مثلما تبين ذلك معاملات الإرتباط الجزئية البسيطة كمايلي:

$r_{Y.L} = 0.993 \qquad r_{LPC} = 0.964$

$r_{Y.P_c} = 0.98 \qquad r_{LPO} = 0.973$

$r_{Y.P_o} = 0.987 \qquad r_{PC \cdot PO} = 0.991$

ولتوضيح أثار التعدد الخطي نحسب الإنحدارات الأولية المذكورة بالفقرة السابقة على النحو:

$1 - \hat{C}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}Y_t = -1.24 + 0.118Y_t: \quad R^2 = 0.995. D-W = 2.6$

$S.E \qquad (0.37) \quad (0.02)$

$2 - \hat{C}_t = \hat{a} + \hat{b}P_{ct} = -38.51 - 0.516P_{ct}: \quad R^2 = 0.951. D-W = 2.4$

$S.E \qquad (4.2) \quad (0.04)$

$$3-\hat{C} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}L = 2.11 + 0.327L \quad R^2 = 0.967, D-W = 0.4$$

$$S.E \qquad (0.81) \quad (0.02)$$

$$4-\hat{C} = \hat{\delta} + \hat{\gamma}P = -53.65 + 0.663P \quad R^2 = 0.977, D-W = 2.1$$

$$S.E \qquad (3.63) \quad (0.03)$$

وما دام الدخل المتاح Y يعتبر المتغير المستقل الأهم في دالة الطلب على الملابس خلال فترة الدراسة. فإننا نختار الإنحدار الأول $C = f(Y)$ كخطوة أولى في تحليلنا. ثم ندخل بقية المتغيرات المستقلة الأخرى بالتدريج لدالة الطلب. ونورد نتائج ذلك في الجدول (2.4) التالي:

المقدرات / الدالة	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	R^2	DW
$C = f(Y)$	-1,24 (0,37)	0,118 (0,002)	–	–	–	0,995	2,6
$C = f(Y,P)$	1,40 (4,92)	0,126 (0,01)	-0,036 (0,07)	–	–	0,996	2,5
$C = f(Y,P,L)$	0,94 (5,17)	0,138 (0,02)	-0,034 (0,06)	0,037 (0,05)	–	0,996	3,1
$C = f(Y,P,P_c)$	-12,76 (6,52)	0,104 (0,01)	-0,188 (0,07)	–	0,319 (0,12)	0,997	3,5
$C = f(Y,P,L,P_c)$	-13,53 (7,5)	0,097 (0,03)	-0,199 (0,09)	0,015 (0,05)	0,34 (0,15)	0,998	3,4

-جدول (2.4)-

وتظهر تغيرات الدخل بأنها مهمة في شرح التغيرات الكلية في الإنفاق على الملابس. كما أن إدخال مؤشر أسعار الملابس P_c يحسن بوضوح من قيمة R^2.

إن إشارات موجه المقدرات $\hat{\beta}$ صحيحة ولكن الأخطاء المعيارية تبين بأن $\hat{\beta}_3$ غير ضروري إحصائيا. كما أن الإرتباط الكبير مابين Y و P_C، ($r_{Y.P_C} = 0,98$).

لايؤثر على إستقرار ومعنوية المقدر $\hat{\beta}_2$. إن إدخال متغير السيولة النقدية (L) لايعطي مقدرا جيدا ومضبوطا لكل من المقدرتين $\hat{\beta}_3$ و $\hat{\beta}_4$. وواضح أن الإرتباط الكبير مابين P_C و L، ($r_{P_C.L} = 0,964$). يجعل من المستحيل الحصول على معنى منفصل للمقدرتين $\hat{\beta}_3$ و $\hat{\beta}_4$. وبالرغم من الإرتباط القوي مابين Y، P_C و L . فإن المقدر $\hat{\beta}_2$ لم يتأثر. ومنه يمكن إعتبار L كمتغير غير ضروري (زائد). إن حذف متغير السيولة النقدية، L، وإدخال متغير المؤشر العام للأسعار P_0 يعطي توفيقا جيدا. حيث ترتفع قيمة R^2 بشكل واضح. وتأخذ كل مقدرات المعالم الإشارة الصحيحة. وتكون معنوياتها مقبولة إحصائيا. كما أنه، بالرغم من درجة التعدد الخطي العالية لكل المحدرات. فإن قيم الأخطاء المعيارية ليست كبيرة.

إن الإنحدار الأخير (الكامل). يبين بأن. أثر التعدد الخطي لايسبب مشاكل تذكر بالنسبة للمقدرتين $\hat{\beta}_2$، $\hat{\beta}_3$. بينما مقدر معلمة السيولة النقدية، $\hat{\beta}_4$. يكون غير مقبول إحصائيا. ومنه يكون متغير السيولة النقدية. عبارة عن متغير غير ضروري (زائد) ونستنتج بأن أحسن توفيق لدالة الطلب على الملابس هو:

$$C = f(Y, P_C, P_0)$$

4-6-4 مثال (2.4) عن التغير الهيكلي:

لنأخذ المثال (1.2) والمذكور بالفصل الثاني لدالة الإستهلاك للأفراد الجزائريين بالأسعار الحقيقية خلال الفترة 1967-1989. وإذا أردنا إختبار وجود تغير هيكلي في معالم الإنحدار خلال الفترتين المختلفتين. الأولى (67-78)، $n_1 = 12$، والثانية خلال (79-89)، $n_2 = 11$، فنكتب:

$$I: Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t: \quad t = 1967, 1968, \ldots, 1978$$

$$II: Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 X_t + u_t: \quad t = 1979, 1980, \ldots, 1989$$

وتكون فرضية عدم وجود تغير هيكلي في معالم النموذج خلال الفترتين الزمنيتين المذكورتين أعلاه على الشكل:

$$H_0: \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

نجري إنحدار النموذج I للفترة الأولى بواسطة المربعات الصغرى العادية لنجد:

$$I: \hat{Y}_t = -1020 + 1,165 X_t: \quad t = 1967, 1968, \ldots, 1978$$

$$S.E \quad (191,8) \quad (0,055)$$

$$R^2 = 0,978, \quad \overline{R}^2 = 0,976, \quad RSS_1 = 99522,37, \quad D-W = 1,71$$

$$\hat{\sigma}_u = 99,76, \quad F_{1,10} = 450,5, \quad n_1 = 12$$

وكذلك بالنسبة للنموذج II نجد:

$$II: \hat{Y}_t = 15,26 + 0,884 X_t: \quad t = 1979, \ldots, 1989$$

$$S.E \quad (803,5) \quad (0,157)$$

$$R^2 = 0,779, \quad \overline{R}^2 = 0,754, \quad RSS_2 = 169534,3, \quad D-W = 2,04$$

$$\hat{\sigma}_u = 137,25, \quad F_{1,9} = 31,73, \quad n_2 = 11$$

ثم نجري إنحدار النموذج تحت الفرضية H_0 صحيحة للفترتين الزمنيتين معا لنجد:

$$H_0: \hat{Y}_t = -343.15 + 0,96X_t ; \quad t = 1967,\ldots,1989$$

$$S.E \quad (140,5) \quad (0,032)$$

$R^2 = 0.976, \quad \overline{R}^2 = 0.975, \quad RRSS = 436351.1, \quad D-W = 1.30$

$\hat{\sigma}_u = 144.15, \quad F_{1,21} = 883.49, \quad n = n_1 + n_2 = 23$

ومنه تكون مجموع مربعات البواقي غير المقيدة هي:

$$URSS = RSS_1 + RSS_2$$

بدرجات حرية هي:

$$(n_1 - k) + (n_2 - k) = n_1 + n_2 - 2k = n - 2k$$

أما بالنسبة للنموذج المقيد تحت H_0 صحيحة تكون مجموع مربعات البواقي المقيدة هي. $RRSS$ وبدرجات حرية هي $n_1 + n_2 - k = n - k$. ومنه تكون إختبار التوزيع F لتحليل التباين والموجود بالمعادلة (75.4) كمايلي:

$$F = \frac{(RRSS - URSS)\ k}{URSS\ (n-k)} \sim F_{k,n-k}$$

$$= \frac{[436351.1 - (99522.37 + 169534.3)]\ 2}{(99522.37 + 169534.3)\ 19} = 6.5 \sim F_{2,19}$$

أما القيمة المجدولة عند $\lambda = 0,05$ فهي $F^* = 3.522$. ومنه نلاحظ أن القيمة المحسوبة أكبر من تلك المجدولة وبالتالي نستنتج بأن H_0 مرفوضة. ومنه يوجد تغير هيكلي مابين الفترتين المذكورتين أعلاه. ويكون النموذج غير مستقر خلال العينتين n_1 و n_2.

التمرين الأول: يعطى لك نموذج الإنحدار الخطي على الشكل:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

مع فرضياته الأساسية.

a) إشتق عبارة جبرية لقانون التوزيع F المناسب للعلاقة أعلاه. وما هي الفرضية المختبرة. وبين العلاقة الموجودة بين التوزيع F والتوزيع t.

b) إذا أضفنا متغيرا مستقلا جديدا للنموذج اعلاه. وليكن X_{3i}. أوجد المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى. وأحسب معامل التحديد المضاعف ثم قارنه بمثيله بالفرع (a).

c) إذا أضفنا متغيرا مستقلا أخر للعلاقة في (b) وليكن X_{4i}. إشتق عبارة جبرية لقانون التوزيع الذي يختبر الفرضية $H_0: \beta_3 = \beta_4 = 0$.

d) اذا كانت $\beta_4 = 0$ صحيحة. فأثبت أن مجموع مربعات البواقي للنموذج الجديد هي أكبر من مثيلتها في نموذج العلاقة ب (c).

e) إذا كان نموذج العلاقة (c) هو الصحيح. وقمنا بتقدير النموذج الموجود بالعلاقة (b) ماذا يحدث لخصائص مقدرات المربعات الصغرى؟

f) إذا كان نموذج العلاقة (a) هو الصحيح. وقمنا بتقدير نموذج العلاقة (c) ما أثر ذلك على خصائص مقدرات المربعات الصغرى؟

g) إذا أردنا التاكد من صحة العلاقة (a) أو (c) إختبر الفرضية:

$$H_0: \begin{pmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

التمرين الثاني: للكتب لنموذج الإنحدار الخطي العام $Y = X\beta + U$ على الشكل:

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + U$$

حيث أن $X = [X_1 \ \vdots \ X_2]$ ، $\beta' = [\beta_1' \ \vdots \ \beta_2']$ ، β_2 هو $(p \times 1)$ ، β_1 هو $(k-p)\times 1$. ونريد إختبار الفرضية:

$$H_0: \beta_2 = 0$$

ولتحقيق ذلك نقوم بالتعريف التالي:

$$\hat{\beta} = AY,\quad M = I - X(X'X)^{-1}X',\quad A = (X'X)^{-1}X'$$

$$\hat{\beta}_i = A_iY,\quad M_i = I - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i',\quad A_i = (X_i'X_i)^{-1}X_i'$$

$; i = 1,2.$

بين صحة العبارات التالية:

a) $H_0: \beta_2 = 0 \Rightarrow (U'M_1U)/\sigma_u^2 \sim \chi^2_{n-(k-p)}$

b) $H_a: \beta_2 \neq 0 \Rightarrow (U'MU)/\sigma_u^2 \sim \chi^2_{n-k}$

c) $(U'MU - U'M_1U)/\sigma_u^2 \sim \chi^2_p$

d) $(\chi^2_p/p)(\chi^2_{n-k}/(n-k))^{-1} \sim F_{p,n-k}$

e) $M_1M = M,\quad (M_1 - M)(M_1 - M) = M_1 - M$

لاحظ أنه يمكن وضع: $X_1 = (X_1 \ \vdots \ X_2)\begin{pmatrix} I \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = XS$

f) $X_1'X_2 = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y,\quad E(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = 0$

g) $X_1'X_2 \neq 0 \Rightarrow E(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \neq 0$

h) $\hat{U}_1 = Y - X_1\hat{\beta}_1 , \quad \hat{U}_2 = X_2 - X_1 P$

$P = (X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2 , \quad X_2 = X_1 P + U_2 ,$

$U_1 , U_2 \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$

هذا كله يعني ويستلزم أن:

$$b_2 = (\hat{U}_2'\hat{U}_2)^{-1} \hat{U}_2'\hat{U}_1 = \hat{\beta}_2$$

$$E(b_2) = \beta_2 \Rightarrow BLUE$$

التمرين الثالث: ليكن النموذج الخطي العام التالي:

$$I: Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + U$$

حيث أن X_1 هي $n \times k$، X_2 هي $n \times k_1$، β_1 هي $k \times 1$، β_2 هي $k_1 \times 1$.

a) قدر معالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى.

b) لنفرض أن النموذج الصحيح هو $II: Y = X_1\beta_1 + U$ قارن مقدر β_1 من النموذج II مع مقدر β_1 من النموذج I.

c) إذا كان النموذج I هو الصحيح، وقمنا بتقدير β_1 من النموذج II. ماهي نتائج هذه العملية من حيث التحيز والتباين؟

التمرين الرابع: لنعتبر النموذج الخطي العام التالي:

$$Y = XA + U \qquad : t = 1,2,\ldots,20$$

$$X = [i \quad X_{21} \quad X_{31} \quad X_{41} \quad X_{51}], \quad A' = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$$

ونريد إختبار القيود الخطية التالية:

$$a_1 = 5, \quad 2a_1 + 3a_2 = 4, \quad a_1 + 2a_2 + a_4 = 7$$

a) حدد الطريقة التي يمكن بواسطتها إختبار H_0. ثم أوجد قيم المعالم المقيدة وعدد القيود.

b) أوجد درجات الحرية للشكل المقيد والشكل الغير المقيد ونسبة التوزيع F. وأكتب الشكل المقيد للنموذج أعلاه.

التمرين الخامس: ليكن النموذج الخطي العام: $Y = X\beta + U$، مع $E(UU') = \sigma_u^2 I_n$. بالإضافة لذلك، هناك معلومات إضافية حول موجه المعالم β متمثلة في القيود الخطية على الشكل $R\beta = r$. حيث أن R هي $m \times k$ مصفوفة قيود.

a) إشتق قانون التوزيع المناسب لهذه القيود وبين شكل الفرضية المختبرة.

b) إذا كان حجم العينة $n = 10$ مع المعلومات التالية:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{pmatrix}, \quad E(u_i^2) = 1$$

- إحسب موجه المقدرات المقيدة $\hat{\beta}_R$، وكذلك مصفوفة تباينه المشترك
- أحسب موجه مقدرات المربعات الصغرى العادية ومصفوفة تباينه المشترك.
- بين صحة العبارة: $var(\hat{\beta}_R) - var(\hat{\beta}) \leq 0$

التمرين السادس: يمثل النموذج الآتي دالة الطلب على النقود في بلدما.

$$M_{Dt} = \beta_1 + \beta_2 i_t + \beta_3 Y_t + \beta_4 L_t + u_t$$

حيث أن M_D، i، Y، L_t هي كمية النقود المطلوبة، سعر الفائدة، الدخل الوطني ومخزون الموجودات السائلة على الترتيب. وبإستعمال بيانات السلاسل الزمنية للفترة 1920-1957 حصلنا على:

$$\hat{M}_{Dt} = 0,003 - 0,29 i_t + 0,53 Y_t + 0,367 L_t$$

$$SE \quad (0,009) \quad (0,112) \quad (0,101) \quad (0,102)$$

$$TSS = 0,1903, \quad R^2 = 0,579$$

a) قيم هذه النتائج من الناحية الإحصائية والإقتصادية

b) بدعوى إختبار مدى إستقرار دالة الطلب على النقود بالنسبة للفترة الطويلة (38 سنة)، قمنا بتقسيم الملاحظات إلى عينتين جزئيتين للإنحدارين التاليين:

$$I: \hat{M}_{Dt} = 0.008 - 0.18 i_t + 0,517 Y_t + 0,281 L_t : t = 1920,...1939$$

$$SE \quad (0.013) \quad (0.15) \quad (0.182) \quad (0.150)$$

$$TSS_1 = 0,0927, \quad R_1^2 = 0,697$$

$$II: \hat{M}_{Dt} = -0.013 - 0,419 i_t + 0,936 Y_t + 0,587 L_t : t = 1940,...1957$$

$$TSS_2 = 0,0805, \quad R_2^2 = 0.459$$

إن الإختلاف الموجود بين معالم الإنحدارين يقترح علينا وجود تغير هيكلي. كون إختبار التغير الهيكلي لـ Chow لكي تقيم فرضية عدم التغير الهيكلي للنموذج.

c) إجري إختبار التنبؤ للفترة (1940-1957) وقارنه مع إختبار Chow.

d) بين بان تنبؤ المربعات الصغرى $\hat{Y}_n^m = X_n^m\hat{\beta}$ هو أحسن تنبؤ من أي تنبؤ خطي غير متحيز آخر على الشكل $\tilde{Y}_n^m = \Lambda Y$ والذي يوافق $E(\tilde{Y}_n^m - Y_n^m) = 0$، مع المتراجحة:

$$var(\tilde{Y}_n^m - Y_n^m) - var(\hat{Y}_n^m - Y_n^m) \geq 0$$

<u>*التمرين السابع*</u>: لكي نختبر فرضية عدم وجود فرق بين الميل الحدي للإستهلاك عند كل من العمال اليدويين وعمال الإدارة، حصل باحث على الدوال التقديرية:

i) <u>عمال يدويون</u>:

$$\hat{C}_1 = 120 + 0,90Y: \quad R_1^2 = 0,92, \quad TSS_1 = 3251$$

$$t.s \quad (32) \quad (5,6) \qquad n_1 = 35$$

ii) <u>عمال الإدارة</u>:

$$\hat{C}_2 = 160 + 0,82Y: \quad R_2^2 = 0,95, \quad TSS_2 = 4532$$

$$t.s \quad (23) \quad (8,5) \qquad n_2 = 30$$

دالة الإستهلاك للعينتين $n = n_1 + n_2 = 65$ هي:

$$\hat{C} = 250 + 0,70Y: \quad R^2 = 0,92$$

$$t.s \quad (5,3) \quad (6,2) \qquad RSS = 16320$$

بإستعمال النتائج السابقة أعلاه، هل بإمكاننا قبول الفرضية القائلة بعدم وجود فرق بالنسبة للميل الحدي للإستهلاك لدى فصيلتي العمال، $\lambda = 0,05$؟

التمرين الثامن: لديك بيانات عن دالة الإستهلاك للأفراد الجزائريين بالأسعار الثابتة للفترة (77-1987) بملايين الدينارات كمايلي:

السنوات	الإستهلاك الفردي C_t	الدخل من الأجور PW_t	الدخل من الممتلكات PP_t
1977	3867,70	2605,21	1393,627
1978	4157,40	3020,25	1444,770
1979	4129,26	3385,73	1579,230
1980	4411,87	3732,69	1633,330
1981	4655,55	3632,15	1639,930
1982	4717,37	3814,17	1636,700
1983	4675,40	3997,01	1570,250
1984	4953,15	3906,41	1540,800
1985	4843,63	3781,73	1558,400
1986	4674,30	3805,68	1551,420
1987	4255,50	3608,54	1647,100

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات ONS.

a) إجري إنحدار العلاقة

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Pw_t + \beta_3 Pp_t + \beta_4 C_{t-1} + u_t.$$

b) طبق طريقة التحليل التزايدي لـ Fisher لإكتشاف التعدد الخطي، ماهي المتغيرات غير الضرورية في الإنحدار أعلاه.

c) إجري الإنحدار بالعلاقة (a) خلال الفترتين:

- الفترة الأولى 1977-1984
- الفترة الثانية 1985-1987

ثم إختبر إستقرار النموذج وماهو نوع الإختبار المستعمل؟

الفصل الخامس: نظرية العينات الكبيرة

تهتم النظرية التقاربية بتصرف المتغيرات العشوائية عندما يرتفع حجم العينة إلى مالانهاية. وللتوضيح أكثر، نقول لتكن $\bar{a}_n$ تمثل وسط العينة العشوائية لـ n ملاحظات مسحوبة من مجتمع ما ذو القيم a_n. إن القيمة $\bar{a}_n$ هي متغير عشوائي معرف بدالة كثافة إحتمالية ممثلة بالشكل $f(\bar{a}_n/\mu,\sigma^2)$. حيث نفترض أن دالة كثافتها الإحتمالية، ذات مثلا Z، تحتوي فقط على معلمتين، الوسط μ والتباين σ^2. ويكون السؤال الجوهري في النظرية التقاربية هو كيفية تصرف هذه المتغيرات العشوائية ودوال كثافتها لما يؤول حجم العينة n إلى مالانهاية. ويكون هدفنا هو دراسة التقارب الإحتمالي (التقارب بالإحتمال) والتقارب بالتوزيع. ونظرا لإعتماد الأخيرين على النهاية الإحتمالية ونهاية التوزيع، فإننا نقوم أولا بالتطرق لمختلف نظريات النهاية الموضحة لذلك.

5-1 نظريات النهاية:

تشير كلمة "نظريات النهاية" إلى عدة نظريات في نظرية الإحتمال تحت مختلف الأسماء، وهي قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers (L.L.N) ونظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem (C.L.T). وتشكل نظريات النهاية أحد الركائز المهمة في نظرية الإحتمالات. حيث تلعب دورا أساسيا في الإستنباط الإحصائي، ويعود أصل هذه النظريات إلى النتيجة المحصل عليها في القرن السابع عشر من طرف الإحصائي James BERNOULLI.

5-1-1 نظرية BERNOULLI:

لتكن a_n تمثل عدد المرات التي تظهر فيه الحادثة A في n محاولة لتجربة عشوائية ما، و $P = P_r(A)$ هي إحتمال ظهور الحادثة A في كل مرة من المحاولات n. ومنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left[\left|\frac{a_n}{n} - P\right| < \varepsilon\right] = 1 \ldots\ldots(5.1)$$

أي أن نهاية إحتمال الحادثة $\left|\frac{a_n}{n} - P\right| < \varepsilon$ تقترب من الواحد كلما إرتفع عدد المحاولات إلى مالانهاية.

ومباشـرة بعـد نشـر نتيجـة BERNOULLI، فـإن DE MOIVRE وLAPLACE إقترحا طريقة أسهل لحساب الإحتمالات الثنائية، وأثبتا أنه لما يكون المقدار $\left|\frac{a_n}{n} - P\right|$ مضروبا بمقلوب (معكوس) خطئه المعياري فإن النتيجة يكون لها توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي لما $n \to \infty$، أي:

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left[\frac{\frac{a_n}{n} - P}{\left[\frac{P(1-P)}{n}\right]^{1/2}} \le Z\right] = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}U^2\right] du \ldots\ldots(5.2)$$

إن النتيجتين المبينتين أعلاه، تساعدنا على ظهور أدبيات الحجم المرتبطة بمختلـف توسـيعات نظريتـي BERNOULLI وLAPLACE-DEMOIVRE والمطروحة اليوم بإسم قانون الأعداد الكبيرة (LLN) ونظرية النهاية المركزية

(CLT) على الترتيب. والموسوع النتيجتين المذكورتين، نذكر بالشروط الأساسية والمعتمد عليها في الحصول عليهما([1]):

a) $u_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$، أي أن u_n معرفة على أنها مجموع n متغير عشوائي

b) $X_i = 1$ إذا ظهر A، $X_i = 0$ غير ذلك، $i = 1,2,\ldots,n$. أي أن X_i هي متغيرات برنولي العشوائية. ومنه فإن u_n هي متغير عشوائي يتبع قانون التوزيع الثنائي.

c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة.

d) $f(x_1) = f(x_2) = \ldots\ldots = f(x_n)$. أي أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ موزعة تماثليا Identicallydistributed (id) مع

$P_r(X_i = 1) = P, P_r(X_i = 0) = 1 - P$، $i = 1,2,\ldots,n$.

e) $E\left(\frac{u_n}{n}\right) = P$. أي أننا نأخذ بعين الإعتبار الفرق الموجود بين المتغير العشوائي وقيمته المتوقعة.

إن الفرق الأساسي بين نظرية Bernoulli ونظرية DEMOIVRE-LAPLACE يكون في تحليلهم للتقارب. فنظرية BERNOULLI بمفردها تشير إلى التقارب في الإحتمال المناسب لسلسلة الحوادث $\left|\frac{u_n}{n} - P\right| < \varepsilon$. بينما تشير نظرية DEMOIVRE-LAPLACE إلى التقارب في الإحتمال المناسب مع سلسلة خاصة من الحوادث، أي الحوادث ذات الشكل $(Z \leq z)$ والتي تعرف دالة التوزيع $F(z)$. وللتفريق بينهما نسمي الأولى التقارب بالإحتمال 'Convergence in Probability' والثانية التقارب بالتوزيع 'Convergence in Distribution' حيث سنتطرق إليهما بالتفصيل فيما يأتي.

---

[1]- Aris SPANOS: "Statistical fondation of Econometric Modelling" Cambrige University Press 1986. Page 166.

2-1-5 التقارب بالإحتمال

كما ذكرنا من قبل، فإنه لمعرفة التقارب بالإحتمال نحتاج إلى معرفة مفهوم السلسلة العشوائية، حيث أن هذه الأخيرة هي عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية، و التي تعتمد بطريقة ما على حجم العينة n. و كمثال على ذلك هو وسط العينة للملاحظات $y_n, \ldots\ldots, y_1$ حيث كلما ترتفع n فإن وسط العينة يتغير ومنه فإن $\bar{Y}_n, \ldots\ldots\ldots, \bar{Y}_1$ هي سلسلة عشوائية. و في مثالنا هذا تكون هذه السلسة عبارة عن سلسلة متوسطات العينة. و منه فإن مشاكل التقارب هي عادة ماتهتم بتصرفات السلسلة لمايؤول n إلى مالانهاية كما أسلفنا ذكره من قبل.

لنجعل a_n تمثل سلسلة من المتغيرات العشوائية السلمية. نقول عن السلسلة العشوائية a_n بأنها تتقارب إحتماليا إلى العدد الثابت a إذا كانت من أجل $\varepsilon > 0$ "مهما كان صغيرا" فإن:

$$\lim_{n \to \infty} P_r\left[|a_n - a| > \varepsilon\right] = 0$$

أو ....(5.3)

$$\lim_{n \to \infty} P_r\left[|a_n - a| < \varepsilon\right] = 1$$

و هناك طريقتان لتمثيل العبارة أعلاه:

إما $a_n \xrightarrow{P} a$

أو $P\lim(a_n) = a$

و ليكن تعريف التقارب بالإحتمال لمتغير عشوائي a بأنه تقارب نحو الصفر "0" للسلسلة $a_n - a$. حيث أن $P\lim(!)$ هي نهاية الإحتمال. إذا كانت a_n هي سلسلة موجهات عشوائية أو سلسلة مصفوفات عشوائية. فإن التعريف أعلاه ينطبق على كل عنصر من عناصر الموجه أو المصفوفة المذكورة. وفي حالة ما إذا كانت a_n هي سلسلة مقدرات. فإن التقارب بالإحتمال إلى القيمة الحقيقية للمعلمة يعني أن ذلك المقدر هو مقدر متسق. وينطبق كذلك هذا التعريف على موجهات ومصفوفات المقدرات.

إن المتراجحة $|a_n - a| > \varepsilon$ يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. إحتمال صحتها محدد بواسطة دالة توزيع معينة. ولتكن $F_n(!)$ تتقارب لـ a_n بواسطة a وكذلك ε. ومنه بمعرفة a وسلسلة التوزيعات المعينة، يشكل هذا الإحتمال سلسلة من النوع $a_1(\varepsilon), a_2(\varepsilon), \ldots\ldots, a_n(\varepsilon)$ والمعتمد وسطيا على ε. بالتالي فإن التعريف بالمعادلة (3.5) يعني أن سلسلة المتغيرات العشوائية $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ تتقارب إحتماليا إلى العدد الثابت a إذا كانت نهاية السلسلة من الإحتمالات مساوية للصفر مهما كانت القيمة الموجبة ε. وكمثال عن التقارب بالإحتمال إلى عدد ثابت، نعتبر وسط العينة $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ لعينة عشوائية $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ من أي مجتمع ذو وسط نهائي μ وتباين σ^2.

نعرف أن توزيع $\bar{X}_n$ له وسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$، ويكون ذلك كافيا لضمان أن سلسلة المتغيرات العشوائية $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots\ldots, \bar{X}_n)$ تتقارب إحتماليا إلى وسط المجتمع μ. وأبسط برهان على ذلك هو متراجحة Cheby Shev.

إن أحد الأسباب الرئيسية لإستعمال التقارب الإحتمالي هو أن الصيغة $p\lim(.)$ لها بعض الخصائص غير موجودة في صيغة التقدير $E(.)$. وهذا يساعدنا نسبيا للحصول على نتائج مرضية بإدخال النهايات الإحتمالية في الحالات التي يتعذر فيها إستعمال صيغة التقدير $E(.)$. ومن خصائص نهاية الإحتمال نذكر:

a) إذا كان لدينا $p\lim(a_n) = a$ و $g(.)$ هي دالة مستمرة، وكان قانون تعريف $g(.)$ لايحتوي على n فإن:

$$a_n \xrightarrow{P} a \Rightarrow g(a_n) \xrightarrow{P} g(a)$$

أو .
$$P\lim[g(a_n)] = g(a)$$

b) إذا كانت a_n و b_n سلسلتين عشوائيتين بحيث أن $p\lim(a_n)$ و $p\lim(b_n)$ موجودتان، فإن:

* $P\lim(a_n + b_n) = P\lim(a_n) + P\lim(b_n)$

* $P\lim(a_n - b_n) = P\lim(a_n) - P\lim(b_n)$

* $P\lim(a_n . b_n) = P\lim(a_n) . P\lim(b_n)$

* $P\lim(a_n / b_n) = P\lim(a_n) / P\lim(b_n)$

بشرط: $P\lim(b_n) \neq 0$

* $P\lim(a_n^2) = (P\lim a_n)^2$

* $P\lim(a_n^{-1}) = (P\lim a_n)^{-1}$

حيث أن $P\lim(a_n) \neq 0$.

تدخل نتيجتين مهمتين في إستنتاج وجود النهايات الإحتمالية على بعض الحالات الخاصة وهما نظرية KHINTCHINE وقاعدة CHEBYSHEV.

3-1-5 نظرية KHINTCHINE

إذا كانت $V_n, \ldots\ldots, V_1$ ملسلة متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع (iid)، بوسط نهائي معروف μ ثم أن وسط العينة $\overline{V}_n$ يتقارب إحتماليا إلى μ لما $n \to \infty$، نقول أنه من أجل $\varepsilon > 0$ مهما كان صغيرا، فإن:

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i - \mu\right| < \varepsilon\right] = 1 \qquad \ldots\ldots.(5.4)$$

وفي ظل شروط المعادلة (4.5) نكتب $P\lim(\overline{V}_n) = \mu$، أو على شكل: $P\lim(\overline{V}) = \mu$.

4-1-5 قاعدة CHEBYSHEV

إذا كانت a_n عبارة عن سلسلة متغيرات عشوائية، بحيث أنه كلما $n \to \infty$ فإن:

$$i)\ \text{Lim}\left[E(a_n)\right] = a$$

$$ii)\ \text{Lim}\left[\text{var}(a_n)\right] = 0$$

هذا يستلزم أن:

$$P\lim(a_n) = a$$

ويمكن البرهنة على ذلك بإستعمال متراجحة CHEBYSHEV. حيث تبين المتراجحة (المذكورة في المعادلة 3.5) بأنه إذا كانت a_n متغيرة عشوائية بوسط μ وإنحراف معياري σ فإن:

$$\Pr\left[\left|a_n - a\right| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2} \qquad \forall k > 0$$

أو تكافؤ:

$$\Pr\left[\left|a_n - a\right| < k\sigma\right] > 1 - \frac{1}{k^2}$$

حيث k ثابت. أي أنه من أجل $0 < \varepsilon$، $0 < \sigma$ و مهما كان صغرهما فإن:

$$\Pr\left[\left|a_n - a\right| < \varepsilon\right] > (1 - \delta)$$

البرهان:

- لنجعل $\delta = \frac{1}{k^2}$ ونطبق هذه المتراجحة لنجد:

$$\Pr\left[\left|a_n - E(a_n)\right| < \delta^{-1/2}\left(\text{var}(a_n)\right)^{1/2}\right] > 1 - \delta$$

إن الشرط الأول (i) يبين بأنه من أجل أي $0 < \varepsilon$ مهما كان صغيرا تكون القيمة $E\left|(a_n) - a\right| < \varepsilon$ لما $n \to \infty$

أما الشرط الثاني (II) فيبين بأنه من أجل أي قيمة $\lambda > 0$ مهما كانت صغيرة، تكون القيمة (المقدار):

$$|var(a_n)| < \lambda$$

أو

$$[var(a_n)]^{1/2} < \lambda^{1/2}$$

وذلك لما تكون n كبيرة (أي $n \to \infty$).

ثم نستعمل المتراجحة: $|a_n - a| \le |a_n - E(a_n)| + |E(a_n) - a|$

كذلك نستخلص من الشرط (I) بأنه من أجل أي ε_1 و n كبيرة فإن:

$$|a_n - a| < |a_n - E(a_n)| + \varepsilon_1$$

وإذا كانت:

$$|a_n - E(a_n)| < \delta^{-1/2}(var(a_n))^{1/2}$$

نحصل على:

$$|a_n - a| < \delta^{-1/2}[var(a_n)]^{1/2} + \varepsilon_1 \le \delta^{-1/2}.\lambda^{1/2} + \varepsilon_1$$

كذلك بإستعمال الشرط (II). ويكون هذا من أجل أية قيمة لـ ε_1، λ وكذلك n كبيرة.

- لما يكون ε_1 و λ معطاة يمكن دائما إختيار ε_1 و λ لنجعل:

$$\delta^{-1/2}.\lambda^{1/2} + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

وبالتالي نجد:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

وذلك كلما كانت العبارة: $|a_n - E(a_n)| < \delta^{-1/2}[var(a_n)]^{1/2}$ تحت الشرطين (I) و (II). إن هذه النتيجة الأخيرة لها إحتمال أكبر من $(1-\delta)$ ونستلزم أن:

$$Pr[|a_n - a| < \varepsilon] > 1 - \delta$$

ومنه نقول، بتطبيق قاعدة CHEBYSHEV، يمكن بسهولة إظهار أن الوسط $\bar{a}_n$ لعينة الملاحظات n، المأخوذة من المجتمع ذو وسط μ والتباين σ^2، يتقارب

إحتماليا إلى μ. ومادام $E(\bar{a}_n)=\mu$ و $var(\bar{a}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$ فإنه يستلزم بالشرطين (I)، (II)، أن تكون $\bar{a}_n$ متقاربة إحتماليا إلى μ.

5-1-5 التقارب بالإحتمال إلى متغير عشوائي

يمكن توسيع مفهوم التقارب الإحتمالي في بعض الأحيان إلى الشكل التالي:

لنفرض أن السلسلة العشوائية a_n تحقق الشرط:

$$P\lim(a_n - a) = 0$$

بحيث أن a ليس عددا ثابتا، وإنما هو متغير عشوائي بتوزيع لايعتمد على حجم العينة n، يمكن تعريف ذلك على أنه تقارب إحتمالي إلى متغير عشوائي. ومنه يجب ملاحظة أنه في هذه الحالة $P\lim(a_n)$ لايساوي a، وإنما الفرق $(a_n - a)$ هو الذي يتقارب إحتماليا إلى العدد الثابت وهو الصفر.

6-1-5 التقارب الدائم و المؤكد: Almost Surely Convergence

يخضع التقارب الدائم والمؤكد للقانون القوي للأعداد الكبيرة (S.L.L.N) Strong Law of Large Numbers وأول نتيجة مرتبطة به في حالة ما إذا كانت a_n سلسلة من متغيرات برنولي الموزعة عشوائيا برهنت من طرف BOREL (1909). حيث تشير نظرية BOREL أنه إذا كانت $\{a_i\}$ هي متغيرات برنولي العشوائية المستقلة و المتماثلة التوزيع مع

$Pr(a_i = 1) = P$. و $Pr(a_i = 0) = 1 - P$ من أجل كل i فإن:

$$\Pr\left[\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=P\right]=1 \quad ......(5.5)$$

أو

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\max_{m\geq n}\left(\left|\frac{a_m}{m}-P\right|\right)\geq\varepsilon\right]=0.....(5.6)$$

ومنه تكون العلاقة مابين القانون القوي للأعداد الكبيرة (المذكورة بالمعادلة (6.5)) والقانون الضعيف للأعداد الكبيرة (والمذكورة بالمعادلة (1.5)) على الشكل:

$$\left|\frac{a_n}{n}-P\right|\leq\max_{m\geq n}\left|\frac{a_m}{m}-P\right|.....(5.7)$$

ومنه يستلزم أن التقارب الدائم والمؤكد يعطي التقارب بالإحتمال والعكس ليس صحيحا.

7-1-5 نظرية KOLMOGOROV

لتكن سلسلة المتغيرات العشوائية والمستقلة $\{a_n ; n\geq 1\}$، بحيث أنه يوجد $E(a_i)$، و $var(a_i)$ من أجل كل i $(i=1,2,....,n)$ فإذا تحقق الشرطان:

$$i)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}var(a_k)=0$$

$$ii)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}var(a_k)<\infty$$

فإنه يمكن كتابة:

$$\Pr\left[\lim\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i-E(a_i)]\right)=0\right]=1.....(5.8)$$

إن هذا القانون القوي للأعداد الكبيرة (S.L.LN) متكافئ مع القانون الضعيف للأعداد الكبيرة (W.L.L.N) والمذكورة من طرف CHEBYSHEV.

إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ سلسلة متغيرات عشوائية ومستقلة بحيث أن: $var(a_i) = \sigma_i^2 < \infty$، ثم من أجل أي $\varepsilon > 0$ فإن:

$$\Pr\left[\underset{1\le k\le n}{Max}\left|a_k - E(a_k)\right| \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \ldots.(5.9)$$

ويذهب KOLMOGOROV إلى البرهنة بأنه في حالة ما إذا كانت $[a_n, n \ge 1]$ سلسلة متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع بحيث $E(a_i) < \infty$ فإن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{var(a_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\int_{-k}^{+k}x^2 f(x)dx < \infty \ldots.(5.10)$$

والتي تعني وتستلزم أنه من أجل سلسلة ما فإن وجود التوقع يعتبر شرطا ضروريا وفي نفس الوقت كافيا للقانون القوي للأعداد الكبيرة. ومنه نقول أنه في حالة متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع، إذا كانت $var(a_i) = \sigma^2$ من أجل i فإن:

$$var(a_n) = n\sigma^2 = 0(n)\ldots..(5.11)$$

في حالة متغيرات عشوائية مستقلة مع $var(a_i) = \sigma_i^2 < \infty$ ، $i=1,2,\ldots,n$ فإن:

$$var(a_n) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = 0(n)\ldots..(5.12)$$

ويمكن كتابة شرط MARKOV [2] على الشكل:

$$var(a_n) = 0(n^2)\ldots..(5.13)$$

حيث نقرأ (0) لأصغر درجة من "of smaler Order than" و نصل إلى نفس الأثر مادام:

$$var(a_n) = 0(n) \Rightarrow var(a_n) = 0(n^2)\ldots..(5.14)$$

---

[2]- Aris SPANOS, page 171 (مرجع سابق)

إن شرط KOLMOGOROV هو شكل مقيد أكثر من شرط MARKOV، متطلبا أن يكون تباين المجاميع الجزئية دائما من الدرجة n وبالتظام.

8-1-5 نهاية التوزيعات: التقارب بالتوزيع: Convergence in Distribution

يعني الإتساق Consistency أن هناك إحتمال عالي لأن يكون خطأ المعاينة صغيرا عندما تكون العينة كبيرة بشكل كاف. ولايقترح هذا المفهوم توضيحا حول خطأ المعاينة مثل الخطأ المعياري. ولهذا الهدف يجب أن نوسع التحليل ومنه نعود إلى سلسلة المتغيرات العشوائية $a_1, a_2, \dots, a_n$ مع دوال توزيعها $F_1(.), F_2(.), \dots, F_n(.)$. نقول عن هذه الدوال التوزيعية $F_i(.)$ بأنها تتقارب بالتوزيع إلى متغير عشوائي ما. مع دالة التوزيع $F(.)$ إذا تقاربت $F_n(.)$ إلى $F(.)$ لما $n \to \infty$ عند كل النقاط المستمرة لـ $F(.)$.

إن التوزيع $F(.)$ يسمى بالنهاية التوزيعية لهذه السلسة من المتغيرات العشوائية a_n. ونلاحظ أن هذا التعريف يحتوي كحالة خاصة على التقارب الإحتمالي إلى العدد الثابت. ومنه نقول إذا كانت a عبارة عن متغير عشوائي له الدالة التوزيعية $F(.)$. فإن a_n تتقارب بالتوزيع إلى a عندما $\lim_{n \to \infty} F_n(a) = F(a)$، وفي حالة متغيرات منقطعة $P(X_n = x) \to P(X = x)$.

- مثال:

لنفرض أن η هي متغير عشوائي موزع مثل: $\eta \sim N(0, Q)$

وأنه لما $n \to \infty$ فإن السلسلة a_n تتقارب توزيعيا إلى η. ويمكن أن نكتب هذا على الشكل:

$$a_n \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, Q)$$

ونقول إذا كانت a_i لها دالة كثافة $f_i(.)$، $(i = 1, 2, \dots, n)$ وكذلك a لها دالة كثافة $f(.)$. فإن التقارب بالتوزيع إلى a أو إلى $f(.)$ يعني أنه من أجل كل

و A مع B و $A \le B$ فإن: $\lim_{n\to\infty} Pr[A \le a_n \le B] = \int_A^B f(s)ds$

وهناك إرتباط قوي بين التقارب بالتوزيع وتقارب الدوال المميزة.

وإذا كنا مهتمين بدراسة التقارب بالتوزيع إلى التوزيع الطبيعي، مثلا، فإن أبسط وسيلة لإثبات التقارب بالتوزيع هي الإستعانة أو إستعمال الدالة المميزة. حيث أن الدالة المميزة لمتغير عشوائي a تعرف كما يلي:

$$Q_a(t) = E(e^{ita}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ita} f(a)da$$

$$Q_a(t) = E(e^{ita}) = E\left[1 + ita + \frac{1}{2!}(it)^2 a^2 + \frac{1}{3!}(it)^3 a^3 + \dots\right]$$

$$Q_a(t) = E(e^{ita}) = \left[1 + it(Ea) - \frac{1}{2!}t^2(Ea^2) - \frac{1}{3!}it^3(Ea^3) + \dots\right]$$

حيث: $i = \sqrt{-1}$

إن النظرية المهمة، في تحديد نهاية التوزيع لسلسلة متغيرات عشوائية $a_1, a_2, \dots, a_n$ والمعتمدة على الدالة المميزة هي أننا نتأكد من أن الدالة المميزة $Q_n(t)$ تتقارب إلى الدالة $Q(t)$ لما $n \to \infty$ من أجل كل t. ثم نتأكد من إستمرارية $Q(t)$ عند النقطة $t = 0$، بعدها نحاول التعرف على التوزيع الذي له $Q(t)$ كدالة مميزة. إن ذلك التوزيع هو نهاية التوزيع للسلسلة $a_1, a_2, \dots, a_n$ ويسمى بالتقارب بالتوزيع.

في الدالة المميزة $Q_a(t)$ أعلاه قمنا بتوسيع e^{ita} إلى سلسلة لامتناهية، ومنه إذا فاضلنا $Q_a(t)$ بالنسبة لـ t، المشتق من الدرجة k، عند النقطة $t = 0$ سيكون $i^k(Ea^k)$. وهناك عدة خصائص للدالة المميزة.

a) تحدد الدالة المميزة لوحدها نوع التوزيع.

b) إذا كانت سلسلة الدوال المميزة $Q_n(t)$ تتقارب إلى الدالة المميزة $Q(t)$، فإن سلسلة الدوال التوزيعية المناسبة لها تتقارب إلى الدالة التوزيعية المحددة بواسطة $Q(t)$.

c) إذا كانت a_1 و a_2 مستقلتين ولهما الدالتين المميزتين $Q_1(t)$، $Q_2(t)$ على التوالي. فإن الدالة المميزة لـ $a_1 + a_2$ هي $Q_1(t).Q_2(t)$.

d) إذا كانت $Q(t)$ هي الدالة المميزة لـ a. فإن $Q(t/k)$ هي الدالة المميزة لـa/k.

إذا كان a موجه عشوائي ذو بعد $(P \times 1)$، فإن الدالة المميزة له:

$$Q_a(t) = E(e^{it'a}) = E\left[e^{i(t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_p a_p)}\right]$$

حيث أن t هو موجه غير عشوائي بنفس أبعاد الموجه العشوائي a. إن الخصائص الأربعة المذكورة أعلاه حول الدالة المميزة تطبق بنفس الطريقة في حالة الموجهات والمصفوفات.

ولنبحث الآن عن الدالة المميزة للموجه a الذي له وسط μ ومصفوفة تباين مشترك هي Σ، أي: . . . . . $a \sim N(\mu, \Sigma)$

$$Q_a(t) = E(e^{it'a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} . \exp\left[-\frac{1}{2}(Z-\mu)' \Sigma^{-1}(Z-\mu) + iZ't\right] dZ$$

$$Q_a(t) = \exp\left[i\mu' t - \frac{1}{2} t' \Sigma^{-1} t\right] \text{(3)}$$

وهي الدالة المميزة لموجه المتغيرات الطبيعية. أما الدالة المميزة للمتغير الطبيعي المعياري هي:

$$Q_a(t) = e^{-t^2/2}$$

3- أنظر

- H THEIL "Principales of Econometrics" 1971, Chap2 John WEILY and Sons (مرجع سابق)

لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ سلسلة متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع بوسط μ، وتباين σ^2. ولتكن $\bar{a}_n$ هي وسط العينة n. ومنه فإن $\sqrt{n}\left(\bar{a}_n - \mu\right)/\sigma$ تتقارب بالتوزيع إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

ولإثبات ذلك نقول، لتكن $Q(t)$ هي الدالة المميزة لكل $a_i - \mu = y$ مثلا. وتكون المشتقتين الأولى والثانية لـ$Q(t)$ على الشكل:

$$Q'(t) = E\left(\frac{de^{ity}}{dt}\right) = E\left(iye^{ity}\right)$$

$$Q''(t) = E(iy)^2 . e^{ity} = -E\left[y^2 . e^{ity}\right]$$

ونظرا إلى أن $e^{ity} = \cos ty + i \sin ty$ لها نهاية وكذلك المقداران $E(y)$ و $E(y^2)$ موجودان، فإن المشتقتين أعلاه، موجودتين ومستمرتين.

وباستعمال الخاصية القائلة بأنه إذا كانت الدالة المميزة $Q(t)$ مستمرة عند الدرجة m من الإشتقاق في جوار الصفر فإن:

$$Q(t) = Q(0) + Q'(0)t + \frac{Q'(0)}{2}.t^2 + \ldots\ldots + \frac{Q^m(0)}{m!}.t^m + 0(t^m)$$

لتكون الدالة المميزة لـ y على الشكل:

$$Q(t) = 1 + i(Ey)t - \frac{E(y^2)}{2}t^2 + 0(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + 0(t^2)$$ [4]

وبتطبيق الخاصية (d) للدوال المميزة تكون الدالة المميزة لـ $\frac{\sqrt{n}y}{\sigma} = \sqrt{n}(a_i - \mu)/\sigma$ هي:

$$Q\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \frac{t^2}{n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

4- أنظر: ثائيل Theil chap2 (مرجع سابق)

حيث أن $Z = 0(a)$ تعني أن $\frac{Z}{a} \to 0$ وكذلك تكون $Z = 0(t^2/n)$ إذا

وفقط إذا كانت $Z = 0(t^2/\sigma^2 n)$ من أجل أي قيمة لـ σ^2 تختلف عن الصفر.

ثم أن المتغير العشوائي الذي نهتم به هو مجموع الحدود المستقلة n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - \mu}{n\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\left(\bar{a}_n - \mu\right)}{\sigma} \quad \ldots (5.15)$$

وباستعمال الخاصية (c) للدوال المميزة يعطي هذا المجموع الدالة المميزة التالية:

$$Q_n(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0.\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n$$

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي وتطبيق توسيعات "تايلور" المعروفة $\log(1+Z) \approx Z$ من أجل $|Z|$ صغيرة يكون:

$$\log Q_n(t) = n\log\left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0.\left(n^{-1}\right)\right] \to -\frac{t^2}{2}$$

$$= n\log\left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(n^{-1/2}\right)\right] \approx n\left[-\frac{t^2}{2n}\right]$$

ولما $n \to \infty$ فإن:

$$\log Q_n(t) = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow Q_n(t) \approx +e^{-t^2/2}$$

ونستخلص أنه لما $n \to \infty$، فإن الدالة المميزة $Q_n(t)$ للمتغير العشوائي في المعادلة (15.5) تتقارب، من أجل كل t، إلى $e^{-t^2/2}$ والتي هي الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي المعياري.

لاحظ أن $e^{-t^2/2}$ مستمرة عند النقطة $t = 0$، وهي جزء من الشرط المذكور أعلاه. ومنه نقول لما تكون a_n سلسلة متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي يمكن كتابة:

$$a_n \xrightarrow{D} \eta \sim N(0,Q).....(5.16)$$

أو:

$$a_n \to N(0,Q).....(5.17)$$

أو

$$a_n \overset{A}{\sim} N(0,Q)$$

5-1-10 خصائص التقارب بالإحتمال والتقارب بالتوزيع:

هناك عدة خصائص للتقارب بالإحتمال والتقارب بالتوزيع، هي:

1) لتكن $[a_n, b_n]$، $n = 1,2,.....$ سلسلتين من المتغيرات العشوائية. إذا تقاربت $a_n - b_n$ إحتماليا إلى الصفر $(p\lim(a_n - b_n) = 0)$ وكانت b_n لها نهاية توزيع (أي b_n تتقارب بالتوزيع إلى متغير عشوائي b). فإن a_n لها كذلك نهاية توزيع (أي a_n تتقارب بالتوزيع إلى b). ومنه فإن هاتين النهايتين التوزيعيتين متماثلتين.

2) لنفرض أن b_n لها نهاية توزيع هو b و a_n لها نهاية إحتمال مساوية للصفر $(p\lim(a_n) = 0)$. فإن حاصل ضرب السلسلتين والمساوي للسلسلة $a_1b_1, a_2b_2, ..., a_nb_n$ يكون كذلك له نهاية إحتمال مساوية للصفر أي:

$$p\lim(a_n b_n) = 0$$

3) لنفرض أن b_n تتقارب بالتوزيع إلى المتغير العشوائي b، و a_n تتقارب بالإحتمال إلى العدد الثابت (ليس بالضرورة أن يكون صفرا) أي $Plim(a_n)=a$ حيث a ثابت. فإن مجموع السلسلتين $a_n + b_n$ يتقارب بالتوزيع إلى $a + b$ أي:

$$a_n + b_n \xrightarrow{D} a + b$$

بينما حاصل الضرب $a_n b_n$ يتقارب بالتوزيع إلى ab، أي:

$$a_n b_n \xrightarrow{D} ab$$

أما حاصل القسمة b_n / a_n فيتقارب بالتوزيع إلى b/a حيث $a \neq 0$، أي:

$$(b_n / a_n) \xrightarrow{D} b/a$$

4) إذا كانت $g()$ دالة مستمرة وكانت a_n تتقارب بالتوزيع إلى a، فإن $g(a_n)$ تتقارب بالتوزيع إلى $g(a)$، حيث أن قانون تعريف $g()$ لايحتوي على n. أي أن:

$$a_n \xrightarrow{D} a \Rightarrow g(a_n) \xrightarrow{D} g(a)$$

5) إذا كانت $g(.)$ دالة مستمرة وقانون تعريفها لايعتمد على n، وكانت $a_n - b_n$ تتقارب بالإحتمال إلى الصفر $(p\lim(a_n - b_n) = 0)$. و a_n تتقارب بالتوزيع إلى a $(a_n \xrightarrow{D} a)$. فإن $g(a_n) - g(b_n)$ تتقارب بالإحتمال إلى الصفر. أي:

$$a_n \xrightarrow{D} a. p\lim(a_n - b_n) = 0 \Rightarrow p\lim[g(a_n) - g(b_n)] = 0$$

ونلاحظ أن هذه القوانين تبقى سارية المفعول لما تكون a_n، b_n سلاسل موجهات أو مصفوفات عشوائية ولما تكون $g(.)$ دالة موجه أو دالة مصفوفة. حيث إذا كانت مثلا A_n سلسلة مصفوفات بحيث $p\lim(A_n) = A$ و b_n سلسلة موجهات بحيث أن: $b_n \xrightarrow{D} b \sim N(0.Q)$ فإن:

$$A_n b_n \xrightarrow{D} Ab \sim N(0, AQA')....(5.18)$$

5-2 المربعات الصغرى في العينات الكبيرة:

في دراسة توزيع المعاينة لمقدر المربعات الصغرى، أشرنا من قبل أنه لما يكون u_i موزعا طبيعيا فإن توزيع المعاينة لـ$\hat{\beta}$ يكون كذلك طبيعيا. حتى و إن لم يكن u_i طبيعي، ولكن له تباينات محددة (نهائية)، يكون توزيع المعاينة لـ$\hat{\beta}$ تقاربيا طبيعيا، وذلك حسب نظرية النهاية المركزية. لنسقط الآن فرضية التوزيع الطبيعي ولندرس توزيع $\hat{\beta}$ لما يزداد حجم العينة n ثم نتساءل هل يقترب المتغير العشوائي $\hat{\beta}$ من β باحتمال عال لما تزداد n؟ وتحت أية شروط يكون توزيع المعاينة لـ$\hat{\beta}$ أقرب إلى التوزيع الطبيعي كلما إزداد حجم n؟ وبعبارة أخرى هل $\hat{\beta}_n$ (والمعتمد على n ملاحظات) يتقارب بالإحتمال إلى β؟ ومتى يتقارب $\hat{\beta}_n$ بالتوزيع إلى التوزيع الطبيعي؟

إن الإجابة عن كل هذه الأسئلة تعود بنا لمشكل التقارب بالإحتمال والتقارب بالتوزيع المذكورين سابقا، ولنأخذ النموذج الخطي العام:

$$Y = XB + U$$

مع X غير عشوائية والأخطاء u_i مستقلة ومتماثلة التوزيع.

$$u_i \sim iiD(0, \sigma_u^2) \qquad i = 1, 2, \dots\dots, n$$

ومنه يكون مقدر المربعات الصغرى العادية هو:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وتحت الشروط المذكورة أعلاه يكون مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ محتفظا بخاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE إن الفرضية أو الخاصية الوحيدة الناقصة هنا هي التي تعني التوزيع الطبيعي، حيث:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad , var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

وبناءا على إختفاء خاصية التوزيع الطبيعي، فإن توزيع المتغير العشوائي $\hat{\beta}$ يكون

غير معروف ويمكن إظهار أن $\text{Lim}\left[\text{var}(\hat{\beta})\right] = 0$ لما يذهب حجم العينة n إلى مالانهاية، ومن ثم باستعمال قاعدة CHEBYSHEV يكون $\hat{\beta}$ مقدر المربعات الصغرى المتسق لـ β [5]. وللتأكد من أن $\text{var}(\hat{\beta})$ تنتهي إلى الصفر كلما ارتفع حجم العينة n. نحتاج إلى بعض الفرضيات حول التصرف النهائي لعزوم العينة في المتغيرات X. ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-1}X'X\right) = Q \ldots (5.19)$$

حيث Q مصفوفة غير شاذة.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-1}X'X\right) \to Q \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(n^{-1}X'X\right)^{-1} \to Q^{-1}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\text{var}(\hat{\beta})\right] = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-1}\sigma_u^2\left(n^{-1}(X'X)^{-1}\right) \to 0.Q^{-1} = 0\right.$$

ومنه نقول عن مقدر ما بأنه متسق إذا حقق الشرطين:

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$\text{ii)} P\lim\left[\text{var}(\hat{\beta})\right] = 0$$

1-2-5 إتساق $\hat{\sigma}_u^2$:

إذا كان $\hat{\beta}$ هو مقدر المربعات الصغرى المتسق لـ β. فمن البديهي أن يكون $\hat{\sigma}_u^2$ مقدر متسق لـ σ_u^2 حيث أن:

$$\hat{U} = Y - X\hat{\beta} = -X(\hat{\beta} - \beta) + U$$

$$\hat{U} - U = -X(\hat{\beta} - \beta)$$

---

[5] - فروخي حمان: "نظرية "الإقتصاد القياسي" ديوان المطبوعات الجامعية، 1993، ص 152-153.

وإذا كانت X غير عشوائية و$\hat{\beta}$ مقدر متسق لـ β فإن كل عنصر من $(\hat{u}_i - u_i)$ يتقارب بالإحتمال إلى الصفر.

$$(\hat{u}_i - u_i) \xrightarrow{P} 0$$

وهذا يعني أن $\hat{u}_i$ يتقارب إحتماليا إلى المتغير العشوائي u_i. فالتصرف النهائي لـ $\hat{\sigma}_u^2 = \sum \hat{u}_i^2/(n-k)$ يكافئ التصرف النهائي لـ $\sum u_i^2/(n-k)$ وهو مستقل ومتماثل التوزيع بتباين $E(u_i^2) = \sigma_u^2$، ومنه بواسطة نظرية KHINTCHINE تصبح:

$$P\lim\left(\frac{\sum u_i^2}{n}\right) = \sigma_u^2$$

ومنه يكون $\hat{\sigma}_u^2$ مقدر σ_u^2 المتسق.

5-2-2 توزيع $\hat{\beta}$ في العينات الكبيرة

لدينا النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ مع X غير عشوائية وكذلك u_i مستقلة ومتماثلة التوزيع $u_i \sim iiD(0, \sigma_u^2)$. ثم لدينا:

$$var(X'U) = \sigma_u^2 X'X ......(5.20)$$

وكذلك:

$$var(n^{-1/2}.X'U) = \sigma_u^2(n^{-1}X'X)......(5.21)$$

وبمعرفة المعادلة (النتيجة) (19.5) تصبح لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} var(n^{-1/2}X'U) = \sigma_u^2 Q....(5.22)$$

ومنه يمكن القول:

$$n^{-1/2}.(X'U) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_u^2 Q)....(5.23)$$

وباستعمال هذه النتيجة في تحليل $\hat{\beta}$ نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'U$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) = \left(n^{-1}X'X\right)^{-1} . (n^{-1/2}X'U)$$

تصبح:

$$n^{-1/2}.(X'U) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_u^2 Q)$$

$$(n^{-1}X'X) \xrightarrow{P} Q \ldots\ldots (5.24)$$

$$(n^{-1}X'X)^{-1} \xrightarrow{P} Q^{-1}$$

أي:

$$P\lim(n^{-1}X'X)^{-1} = Q^{-1} \ldots\ldots (5.25)$$

وباستعمال المعادلة (18.5) تصبح:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} \eta Q^{-1} \sim N(0, \sigma_u^2 Q^{-1} Q Q^{-1})$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} Q^{-1}\eta \sim N(0, \sigma_u^2 Q^{-1}) \ldots (5.26)$$

ومنه في العينات الكبيرة:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \overset{A}{\sim} N(0, \sigma_u^2 Q^{-1})$$

$$(\hat{\beta} - \beta) \overset{A}{\sim} N(0, \sigma_u^2 n^{-1} Q^{-1}) \ldots\ldots (5.27)$$

حيث تعني A تقاربيا Asymptotically وQ^{-1} هي نهاية السلسلة $(n^{-1}X'X)$ وما دامت Q هي نهاية السلسلة $n(X'X)^{-1}$ هي Q^{-1} لـ $(n^{-1}X'X)^{-1}$ فإن عينة التقارب النهائية المناسبة

ومنه تصبح من أجل الأعداد الكبيرة:

$$\hat{\beta} \overset{A}{\sim} N\left(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1}\right) \ldots\ldots (5.28)$$

3-2-5 القيود الخطية الدقيقة (الصحيحة)

لإختبار مجموعة من القيود الخطية في ظل العينات الكبيرة وتحت الشروط القوية للمربعات الصغرى، نقول أنه إعتمادا على تقارب مقدر المربعات الصغرى β في المعادلة (28.5) تكون مجموعة القيود الخطية والمستقلة $R\beta = r$ على الشكل:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{D}Q^{-1}\eta \sim N(0,\sigma_u^2 Q^{-1})$$

وباستعمال المعادلة (18.5) تكون:

$$\sqrt{n}R(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{D}RQ^{-1}\eta \sim N(0,\sigma_u^2 RQ^{-1}R')$$

$$\sqrt{n}(R\hat{\beta}-r)\xrightarrow{D}RQ^{-1}\eta \sim N(0,\sigma_u^2 RQ^{-1}R')$$

وتحت الفرضية $H_0 : R\beta = r$، تصبح:

$$n(R\hat{\beta}-r)'\left[\sigma_u^2 RQ^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)\xrightarrow{D}\chi^2 \sim \chi_m^2$$

$$n(R\hat{\beta}-r)'\left[RQ^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)/\sigma_u^2 \xrightarrow{D}\chi^2 \sim \chi_m^2 \ldots(5.29)$$

$$(R\hat{\beta}-r)'\left[Rn^{-1}Q^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)/\sigma_u^2 \xrightarrow{D}\chi^2 \sim \chi_m^2$$

حيث m هي عدد القيود الخطية.

وتمثل العبارة (29.5) التقارب بالتوزيع إلى المتغير العشوائي χ^2 والذي له توزيع χ^2 بدرجات حرية m. وهو مايبين كيفية الإنتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع χ^2 بنفس الطريقة المذكورة في الفصل الثالث. في العينات الكبيرة تعوض المصفوفة Q^{-1} بالتقريب $n(X'X)^{-1}$.

$$(R\hat{\beta}-r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta}-r)/\sigma_u^2 \overset{\wedge}{\sim} \chi_m^2 : H_0 : R\beta = r \ldots(5.30)$$

ومن حديثنا بالفصل الثالث نعرف أن الصيغة التربيعية (30.5) هي عبارة عن الفرق بين مجموع مربعات البواقي المقيدة (RRSS) وغير المقيدة (URSS) ومنه نقول:

$$(RRSS - URSS)/\sigma_u^2 \overset{\wedge}{\sim} \chi_m^2 : H_0 : R\beta = r \ldots(5.31)$$

4-2-5 إتساق $\hat{\beta}$ لما تكون المصفوفة X عشوائية

إذا إحتوت المصفوفة X على بعض الأعمدة التي تكون عشوائية، مع بقاء المصفوفة Q غير شاذة وبوجود الفرضيتين:

$$i)P\lim(n^{-1}X'X) = Q........(5.32)$$

$$ii)P\lim(n^{-1}X'U) = q = 0...(5.33)$$

تكون النهاية الإحتمالية لمقدر المربعات الصغرى $\hat{\beta}$ على الشكل:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'U$$

$$\hat{\beta} = \beta + (n^{-1}X'X)^{-1}(n^{-1}X'U)$$

$$p\lim(\hat{\beta}) = \beta + p\lim(n^{-1}X'X)^{-1} p\lim(n^{-1}X'U)$$
$$= \beta + Q^{-1}q$$

وبإعتبار $q = 0$، فإن:

$$p\lim(\hat{\beta}) = \beta.....(5.34)$$

ومنه نقول بوجود الفرضيتين (32.5)، (33.5) يكون $\hat{\beta}$ مقدرا متسقا. أما لما يزداد حجم العينة، فتوزيع المقدر $\hat{\beta}$ يكون بناءاً على النتيجتين:

$$P\lim(n^{-1}X'X) = Q$$

$$n^{-1/2}(X'U) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \sigma_u^2 Q)$$

على الشكل:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} Q^{-1}\eta \sim N(0, \sigma_u^2 Q^{-1})........(5.35)$$

5-3 التوزيعات التقاربية لمقدر المعقولية العظمى:

5-3-1 طريقة المعقولية العظمى:

تستعمل طريقة المربعات الصغرى والتقنيات المرتبطة بها العزم الأول والثاني (الوسط والتباين على التوالي) للملاحظات فقط. ففي بناء أي نموذج يكون شكل التوزيع مخصصا مسبقا، والتقيد بالعزمين الأوليين يمكن أن يكون إحصائيا غير كاف، وتحاول طريقة المعقولية العظمى إدخال كل المعلومات في النموذج بواسطة الإهتمام بالتوزيع الكامل للملاحظات. حيث في النموذج الخطي العام تقترح نظرية "قوس-ماركوف" مبررات إستعمال طريقة المربعات الصغرى. وتكون الفرضية الوحيدة الموضوعة حول توزيع الملاحظات هي وجود العزمين الأولين (الوسط والتباين) ومنه تكون مقدرات المربعات الصغرى أفضل مقدرات مثلما لاحظنا من قبل. لكن لايمكننا تطبيق نفس المعايير على النموذج الديناميكي (والذي سوف نتطرق إليه في الفصل السابع). وذلك بالرغم من بقاء الهدف نفسه في التقدير وهو تصغير مجموع مربعات البواقي.

ولنفرض أنه لدينا عينة تحتوي على مجموعة من n ملاحظات لمتغيرات عشوائية $y_1, y_2, \ldots, y_n$. ويخصص النموذج الإحصائي توزيعات لـ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ تعرف بإسم دالة الكثافة المشتركة. تعتمد هذه الأخيرة على k معلمة غير معروفة في شكل موجه $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. ونمثل دالة الكثافة المشتركة بواسطة دالة المعقولية $L(y_1, \ldots, y_n, \underset{\sim}{\theta})$، ونشرحها على أنها إحتمال الحصول على القيم الخاصة بـ $y_1, y_2, \ldots, y_n$. وبمجرد سحب العينة من المجتمع، تصبح الملاحظات $y_1, y_2, \ldots, y_n$ عبارة عن مجموعة أعداد مثبتة، ويعبر بعد ذلك عن دالة الكثافة المشتركة بأنها دالة لموجه المعالم $\underset{\sim}{\theta}$، حيث أن $\underset{\sim}{\theta}$ هي أية قيمة مقبولة لموجه المعالم، عوضا عن القيمة الحقيقية. ومنه نسمي هذه الدالة بدالة المعقولية ونرمز لها بالرمز $L(\theta)$. وتكون طريقة المعقولية

العظمى هي تقدير الموجه θ بمعرفة ملاحظات العينة. ويعطى هذا المقدر بالرمز $\tilde{\theta}$ بحيث يحقق هذا المقدر الشرط:

$$L(\tilde{\theta}) \geq L(\bar{\theta}) \ldots\ldots (5.36)$$

حيث أن $\bar{\theta}$ هي أي مقدر آخر بطريقة بديلة.

ومنه يكون قانون مقدر المعقولية العظمى هو ذلك المقدر الذي يضمن ويحقق الشرط المذكور في المعادلة (36.5). وتعتمد نظرية التقدير بالمعقولية العظمى على فكرة سحب الملاحظات n من نفس التوزيع بطريقة مستقلة. ومنه تكون دالة الكثافة المشتركة لكل الملاحظات (دالة المعقولية العظمى) على الشكل:

$$L(y_1, \ldots\ldots, y_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(y_i, \theta) \ldots. (5.37)$$

حيث أن: $\Pr(y_i, \theta)$ هي دالة الكثافة الإحتمالية لـ y_i $(i = 1,2,\ldots\ldots n)$.

تعتبر $L(\theta)$ دالة مستمرة لـ θ ويمكن أن نحصل على مقدر المعقولية العظمى عن طريق الإشتقاق بالنسبة لموجه المعالم غير المعروفة. ويكون من الأسهل إدخال اللوغاريتم الطبيعي على هذه الدالة (37.5) مادام هذا الإجراء لايؤثر على الشرط الموجود بالمعادلة (36.5). إن المشتقات الجزئية الأولى للموجه $\theta \leftarrow k \times 1$ من الشكل $\partial \log L(\theta)/\partial\theta$ تكون على النحو:

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots (5.38)$$

وللتبسيط نعيد كتابة المعادلة (38.5) على الشكل:

$$D \log L(\theta) = 0 \ldots\ldots (5.39)$$

ـد يمكن أن يقيم المشتق الأول بالمعادلة (39.5) عند أية نقطة. فكتابة $D \log L(\tilde{\theta})$ يشير إلى موجه المشتقات الأولى مقيم عند النقطة $\theta = \tilde{\theta}$. أي:

$$D\log L(\tilde{\theta}) = \left.\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} \quad ......(5.40)$$

وبنفس الطريقة يمكن للمصفوفة $k \times k$ من المشتقات الثانية أن تكون:

$$D^2\log L(\tilde{\theta}) = \left.\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} \quad ......(5.41)$$

حيث تشير المعادلة (41.5) إلى المصفوفة الهيسية Hessian Matrix للوغاريتم دالة المعقولية العظمى عند المقدر $\tilde{\theta}$.

ويكون مقدر المعقولية العظمى $\tilde{\theta}$ حلا لمعادلات المعقولية العظمى المذكورة بالمعادلة (39.5). ومادام أن هناك أكثر من حل للمعادلة (39.5). فمن المهم التأكد من أننا وصلنا إلى أعظم نقطة. ونصل إلى أعظم نقطة لدالة المعقولية لما تكون المصفوفة الهيسية في (41.5) سالبة شبه محددة. وسنوضح ذلك لدى تطرقنا لنظرية Cramer-Rao فيما بعد.

5-3-2 الشروط النظامية:

ننظر الآن إلى تقدير المعقولية بصفة عامة. ولنفرض أنه لدينا عينة عشوائية بملاحظات المتغيرات التابعة y_i، $n \times 1$ ، و X مصفوفة ملاحظات متغيرات مستقلة $n \times k$. و θ هي $k \times 1$ موجه لمعالم نموذج ما. ولتكن دالة كثافتها المشتركة $\Pr(y, \theta, X)$ وذات التوزيع المستمر على الشكل:

$$\Pr(y, \theta, X) = f(y_1, \theta, X_1).f(y_2, \theta, X_2)......f(y_n, \theta, X_n)$$
$$= L(\theta, y, X) = L(\theta) = L ....(5.42)$$

حيث $L(\theta)$ هي دالة المعقولية من أجل أي θ. ويفترض في دالة المعقولية العظمى بالمعادلة (42.5) أن يكون لها المشتقات الجزئية الأولى والثانية بالنسبة لـ θ. وتكون هذه المشتقات مستمرة بالنسبة لـ y. ومنه تسمح المشتقات $\log L(\theta)$ بأن تكون مستمرة وكمتغيرات عشوائية.

إن تعظيم دالة المعقولية يعطي:

$$\partial \log L(\theta)/\partial\theta = \left(\frac{1}{L}\right)\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \ldots\ldots (5.43)$$

وإذا أعطتنا هذه المشتقة معادلات غير خطية في θ، تكون طريقة التكرار (6) ضرورية للحصول على مقدر المعقولية العظمى $\tilde{\theta}$. وللتبسيط نستعين بالتعريف الموجود بالمعادلة (39.5). ونعيد كتابة (43.5):

$$D \log L(\theta) = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} \ldots\ldots (5.44)$$

وإذا كانت $\tilde{\theta}$ هي مقدر المعقولية العظمى، يجب أن تحقق الشروط الأولى للإشتقاق، وهي:

$$D \log L(\tilde{\theta}) = 0 \ldots\ldots (5.45)$$

وبما أن دالة المعقولية العظمى $L(\theta)$ هي نفسها دالة الكثافة $f(\theta, y)$ (الأولى مفسرة بدلالة المعالم θ، والثانية مفسرة بدلالة المعالم θ والملاحظات y_i). كما أن تكامل دوال الكثافة يساوي الواحد. فإنه يكون تكامل $L(\theta)$ بالنسبة لفضاء العينة مساو للواحد من أجل أية قيمة مقبولة لـ θ.

أي أن دالة الكثافة ذات n أبعاد تستلزم أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} L(y_1, \ldots, y_n, \theta) dy_1 \ldots\ldots dy_n = 1$$

حيث أن نهاية التكامل أعلاه مستقلة عن θ والتفاضل تحت التكامل يكون مقبولا. وهي ما تسمى بالشروط النظامية. ومنه يمكن إعادة كتابة العبارة أعلاه في شكل موجهات على النحو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta) dy = 1 \ldots\ldots (5.46)$$

6- أنظر:

A. C. HARVEY 1981, Page 87 "The Econometric Analysis of Time Series" Philip Alan OXFORD

وبإشتقاق طرفي المعادلة (46.5) بالنسبة لـ θ وبإستعمال النتيجة (43.5) نجد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} L(\theta)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}.dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial\theta}.L(\theta)dy=0......(5.47)$$

وبإستعمال المعادلة (39.5) تصبح المعادلة (47.5) أعلاه على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D\log L(\theta).L(\theta)dy=0.....(5.48)$$

و ما دامت دالة المعقولية $L(\theta)$ متماثلة (متكافئة) مع دالة الكثافة المشتركة $\Pr(y,\theta,X)$ والتي هي عشوائية، فإن مشتقها هو كذلك عشوائي بالنسبة لـ θ وتكون نتيجة المعادلة (48.5) متناسقة مع توقع مشتقة اللوغاريتم لدالة المعقولية. ونعيد كتابة المعادلة (48.5) على الشكل:

$$:E[D\log L(\theta)]=\int D\log L(\theta).L(\theta)dy=0.....(5.49)$$

حيث أن التكامل هو لفضاء العينة.

إن إشتقاق المعادلة (47.5) (وبالتالي (48.5)) مرة ثانية بالنسبة لـ θ'، يمكن أن يعطينا عبارة لتباين $D\log L(\theta)$. وللتأكد من أن الأبعاد محترمة تذكر أن $\partial^2()/\partial\theta\partial\theta'$ تكافئ $\partial()/\partial\theta'$ المطبقة على موجه الأعمدة للمشتقات الجزئية الأولى في (47.5). إذن بإشتقاق هذه الأخيرة بالنسبة لـ θ' نجد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta'}\int\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta}.L(\theta)dy=0$$

$$=\int\left[\frac{\partial^2\log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}.L(\theta)+\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta}.\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta'}\right]dy=0$$

$$=\int\frac{\partial^2\log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}.L(\theta)dy+\int\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta}.\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta'}.L(\theta).dy=0...(5.50)$$

وبإستعمال المعادلة (39.5) ومايناسبها بالمعادلة (41.5) تصبح نتيجة المعادلة(50.5) على الشكل:

$$\int D^2\log L(\theta).L(\theta).dy+\int D\log L(\theta).D\log L'(\theta)Ldy=0....(5.51)$$

إن الحد الأول ليسار المعادلة (51.5) هو توقع لوغاريتم المشتقة الثانية وهي مصفوفة $(k \times k)$. ونكتبها على الشكل:

$$E\left[D^2 \log L(\theta)\right] = \int D^2 \log L(\theta).L(\theta).dy.....(5.52)$$

أما الحد الثاني ليسار نفس المعادلة فهو التباين المشترك للمشتقة الأولى $D \log L(\theta)$، أي:

$$var\left[D \log L(\theta)\right] = E\left[(D \log L(\theta))(D \log L(\theta)')\right]$$

$$= \int \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta'}.L(\theta).dy.....(5.53)$$

وبما دام $E\left[D \log L(\theta)\right] = 0$ من المعادلة (49.5) فإن صيغة المعادلة (53.5) تكافئ مصفوفة التباين -التباين المشترك للموجه العشوائي $D \log L(\theta)$ ومنه نعيد كتابة المعادلة (51.5) على الشكل:

$$E\left[D^2 \log L(\theta)\right] + var\left[D \log L(\theta)\right] = 0.....(5.54)$$

لينتج لدينا:

$$var\left[D \log L(\theta)\right] = -E\left[D^2 \log L(\theta)\right].....(5.55)$$

وتسمى المصفوفة $k \times k$ على يمين المعادلة (55.5) بمصفوفة المعلومات Information Matrix وتكتب على الشكل:

$$I(\theta) = -E\left[D^2 \log L(\theta)\right].....(5.56)$$

ومنه نقول أنه من أجل θ والتي تحقق:

I) $Pr(y, \theta, X)$ كدالة كثافة مشتركة.

II) $D \log L(\theta)$ موجه عشوائي.

III) تتوزع $D \log L(\theta)$ بوسط مساو للصفر، وتباين مساو لمصفوفة المعلومات أي: $D \log L(\theta) \sim \left[0, I(\theta)\right]$

فإنه توجد قيمة صحيحة ووحيدة لـ θ والتي تحقق الشرطين:

$$a) E\left[D \log L(\theta)\right] = 0$$

$$b) var\left[D \log L(\theta)\right] = I(\theta) = -E\left[D^2 \log L(\theta)\right]$$

3-3-5 إشتقاق متراجحة Cramer-Rao

ليكن لدينا المقدر غير المتحيز $\hat{\theta}$ لـ θ، ومنه بالتعريف يصبح لدينا:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$E(\hat{\theta}) = \int \hat{\theta} L(\theta) dy = \theta \ldots (5.57)$$

وبإشتقاق (57.5) بالنسبة لـ θ نجد:

$$\int \hat{\theta} D \log L(\theta). L(\theta). dy = 1 \ldots (5.58)$$

ولدينا المعادلة (49.5)، $E[D \log L(\theta)] = 0$، وبالتالي يمكن كتابة العبارة:

$$E[\theta. D \log L(\theta)] = \theta. E[D \log L(\theta)] = 0$$

وبإدخال هذه العبارة بالمعادلة (58.5) تعطي:

$$1 = \int (\hat{\theta} - \theta) D \log L(\theta). L(\theta). dy$$

ومنه بإستعمال متراجحة Cauchy-Schwartz، نجد:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 . L(\theta). dy\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (D \log L(\theta))^2 . L(\theta). dy\right] \geq 1$$

ومنه لما يكون $\hat{\theta}$ موجه $k \times 1$ تصبح:

$$\left[\int (\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'. L(\theta). dy\right]\left[\int D \log L(\theta). D \log(\theta)'. L(\theta). dy\right] \geq I \ldots (5.59)$$

إن الحد الأول للمعادلة (59.5) هو $var(\hat{\theta})$. أما الحد الثاني فهو مصفوفة المعلومات المعرفة بالمعادلة (55.5). ومنه نعيد كتابة المعادلة (59.5) على الشكل:

$$\left[var(\hat{\theta})\right]\left[I(\theta)\right] \geq I$$

ومنه نجد:

$$var(\hat{\theta}) \geq I^{-1}(\theta) \ldots (5.60)$$

وهو ما يسمى بمتراجحة Cramer-Rao.

مثال: (1.5):

لنأخذ لوغاريتم دالة المعقولية في عينة ملاحظات n لمتغيرات عشوائية مستقلة y من التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2، على الشكل:

$$\log L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}.\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

حيث هنا $\theta = (\mu,\sigma^2)'$. وتكون عناصر $D\log L(\theta)$ هي:

$$\frac{\partial \log L}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}.\sum(y_i-\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\sigma^2} = \frac{-n^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}.\sum(y_i-\mu)^2 = 0$$

ومنه نجد:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mu} &= \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y} \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{\sum(y_i-\mu)^2}{n}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(5.61)$$

إن العبارتين بالمعادلة (61.5) تعتبران الحلين الوحيدين لمعادلتي المعقولية. ومراجعة بسيطة لمصفوفة المشتقات الجزئية الثانية (المصفوفة الهيسية) تبين بأن هاتين القيمتين $(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)$ فعلا تعظمان $\log L(\theta)$، أي:

$$D^2\log L(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^2\partial\mu} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial(\sigma^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\cdot\sum(y_i-\mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\cdot\sum(y_i-\mu) & \frac{n}{2\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\sum(y_i-\mu)^2 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في المعادلة (61.5) نجد:

$$.D^2 \log L(\theta) = -\begin{bmatrix} \frac{n}{\tilde{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\tilde{\sigma}^4} \end{bmatrix} \leq 0 \ldots\ldots(5.62)$$

و مادام $\tilde{\sigma}^2 > 0$ فمن الواضح أن العبارة (62.5) سالبة شبه محددة، ومنه تكون:

$$I(\mu,\sigma^2) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix} = -E\left[D^2 \log L(\theta)\right] \geq 0 \ldots\ldots(5.63)$$

وتقترح علينا متراجحة Cramer-Rao أن تكون مصفوفة التباين المشترك لموجه المقدرات $\hat{\theta}$ تفوق معكوس مصفوفة المعلومات كما هو مبين في المعادلة (60.5) بمصفوفة موجبة شبه محددة. ومنه يكون:

$$I^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \sigma^2/n & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/n \end{bmatrix} \ldots\ldots(5.64)$$

أصغر تباين محدود Minimum Variance Bounded (M.V.B). نقول عن المقدر $\tilde{\theta}$ بأنه مقدر كفؤ، وإذا كان $\tilde{\theta}$ مقدرا غير متحيز في هذه الحالة نقول عن هذا المقدر $(\tilde{\theta})$ بأنه مقدر غير متحيز بأصغر تباين Minimum Variance Unbiased Estimator (M.V.U.E).

مثال (2.5):

لنعتبر النموذج الخطي العام $Y = X\beta + U$ مع X غير عشوائية وبوجه الأخطاء يخضع لقانون التوزيع الطبيعي $U \sim N(0,\sigma_u^2)$. تكون دالة الكثافة لملاحظات المتغير التابع:

$$P(y,\beta,\sigma^2) = (2\pi\sigma_u^2)^{-n/2}.\exp\left[-(y - X\beta)'(y - X\beta)/2\sigma_u^2\right]$$

تفسر دالة الكثافة على أنها دالة لـ y بمعرفة المعالم β، σ^2. وتكون دالة المعقولية العظمى لها نفس الشكل، لكنها مفسرة بدلالة المعالم. ومنه نكتب دالة المعقولية العظمى كمايلي:

$$L(\beta,\sigma_u^2,y) = (2\pi\sigma_u^2)^{-n/2}.\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}.U'U\right]$$

و بإدخال اللوغاريتم الطبيعي نجد:

$$\log L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)....(5.65)$$

إن تعظيم (65.5) بالنسبة للمعالم β، σ_u^2 يعطي:

$$\frac{\partial \log L}{\partial\tilde{\beta}} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_u^2}\left(X'y - X'X\hat{\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\tilde{\sigma}_u^2} = -\frac{n}{2\tilde{\sigma}_u^2} + \frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2}(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) = 0$$

ومنه ينتج:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y = \hat{\beta}\\ \tilde{\sigma}_u^2 &= \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{n.} = \frac{\hat{U}'\hat{U}}{n}\end{aligned}\right\}.....(5.66)$$

و منه نلاحظ أن مقدر المعقولية العظمى $\tilde{\sigma}_u^2$ يختلف عن مقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\sigma}_u^2$ حيث أن الأول متحيز والثاني غير متحيز. لكن تقاربيا يضمحل هذا التحيز مثلما سنرى فيما بعد.

أما المشتقات الجزئية الثانية فهي:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\beta}'} = \frac{-1}{\tilde{\sigma}_u^2} X'X$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial(\tilde{\sigma}_u^2)^2} = \frac{n}{2\tilde{\sigma}_u^4} - \frac{RSS}{\tilde{\sigma}_u^6}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\sigma}_u^2} = -\frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^4}\left(X'y - X'X\tilde{\beta}\right)$$

وبأخذ توقعات القيم أعلاه وتحويل الإشارة نجد:

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\beta}'}\right] = \frac{1}{\sigma_u^2} X'X$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial(\tilde{\sigma}_u^2)^2}\right] = \frac{n}{2\sigma_u^4}$$

لأن $E(RSS) = n\sigma_u^2$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\sigma}_u}\right] = 0$$

لأن:

$$E\left[X'y - X'X\tilde{\beta}\right] = E\left[X'y - X'X\hat{\beta}\right]$$

$$= E\left[X'(y - X\hat{\beta})\right] = E(X'\hat{U})$$

$$=0$$

وباستعمال المعادلة (56.5) لدينا:

$$I(\theta) = I\begin{pmatrix}\beta \\ \sigma_u^2\end{pmatrix} = -E\left[D^2 \log L(\beta, \sigma_u^2)\right]$$

أي أن:

$$I\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma_u^2\end{pmatrix} = -E\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\beta}'} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\beta}\partial\tilde{\sigma}_u^2}\\ \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\tilde{\sigma}_u^2\partial\tilde{\beta}} & \dfrac{\partial^2 \log L}{\partial(\tilde{\sigma}_u^2)^2}\end{bmatrix}$$

$$I\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma_u^2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sigma_u^2}X'X & 0\\ 0 & \dfrac{n}{2\sigma_u^4}\end{bmatrix}$$

تصبح:

$$I^{-1}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma_u^2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_u^2(X'X)^{-1} & 0\\ 0 & \dfrac{2\sigma_u^4}{n}\end{bmatrix} \geq 0 \ldots (5.67)$$

وهذا ما يتطابق مع متراجحة Cramer-Rao حيث أن مقدرات المعقولية العظمى تحقق شروط Cramer-Rao والمتمثلة في (M.V.B).

4-3-5 الخصائص التقاربية لمقدر المعقولية العظمى:

يعتمد مقدر المعقولية العظمى على معلومات العينة فقط. ومنه لما يوجد مقدر غير متحيز وبتباين ذو أصغر حد نقول عن هذا الأخير بأنه متماثل (متكافئ) مع مقدر المعقولية العظمى. وبالرغم من صعوبة الحصول على مقدر له خاصية أصغر حد للتباين. مثلما شاهدنا في المثال (1.5) والمتعلق بتقدير σ_u^2 (حيث أن $\tilde{\sigma}_u^2$ في هذه الحالة هو متحيز). فإنه يمكننا القول بأن هذا التحيز يصبح عديم المفعول لما يزداد حجم العينة n بشكل كبير. حيث من المعادلة (61.5) لدينا:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum(y_i - \tilde{\mu})^2}{n} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}$$

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{E(RSS)}{n} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

ومنه لما $n \to \infty$ فإن: $E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2$

كما أن تباين $\tilde{\sigma}^2$ يتجه عند أدنى حد للتباين وهو $2\sigma^4/n$ وهو ما يبين بأن مقدرات المعقولية العظمى عادة، تحقق الحد الأدنى لـ Cramer-Rao في العينات الكبيرة.

وبينا من قبل بأن، $D\log L(\theta) \sim [0, I(\theta)]$ لنستنتج أن:

$$\left.\begin{array}{l} n^{-1/2} D\log L(\theta) \sim [0, n^{-1}I(\theta)] \\ n^{-1} D\log L(\theta) \sim [0, n^{-2}I(\theta)] \end{array}\right\} \ldots\ldots(5.68)$$

و إذا فرضنا أنه كلما $n \to \infty$، فإن $n^{-1}I(\theta)$ تتقارب إلى نهاية معروفة وتساوي المصفوفة المحددة الموجبة Q، فإنه يمكن الإقتراح بأن المقدر $n^{-1/2} D\log L(\theta)$ يتقارب بالتوزيع إلى متغير عشوائي، وليكن η، كمايلي:

$$n^{-1/2} D\log L(\theta) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, Q) \ldots\ldots(5.69)$$

كما أن $n^{-1} D\log L(\theta)$ ذات الوسط صفر والتباين ($(n^{-2}I(\theta))$)، تتقارب إلى الصفر لما $n \to \infty$ ومنه بإستعمال قاعدة CHEBYSHEV تكون هذه الأخيرة متقاربة بالإحتمال إلى الصفر. أي:

$$n^{-1} D\log L(\theta) \xrightarrow{P} 0 \ldots\ldots(5.70)$$

ونستعين الأن بهاتين النتيجتين (بالمعادلتين (69.5)، (70.5)) لمناقشة خصائص مقدر المعقولية العظمى بالنسبة لـ $\tilde{\theta}$.

في عينة لـ n ملاحظات مستقلة ومسحوبة عن دالة كثافة إحتمالية تحتوي على موجه المعالم θ، تكون معادلات المعقولية والتي تحقق شروط الإشتقاق الأولى من النوع $D\log L(\tilde{\theta}) = 0$. وهناك عدة حلول ممكنة للمعادلة (45.5).

لكن النقطة الوحيدة التي تحقق الشروط النظامية هي تلك القيمة $\tilde{\theta}$. وإذا تحقق ذلك فإنه لإشتقاق الخصائص التقاربية لمقدر المعقولية العظمى. نقوم بتطبيق نظرية تايلور لتوسيع السلاسل حول القيمة الحقيقية لـ θ لنجد:

$$D\log L(\tilde{\theta}) = 0$$

$$\approx D\log L(\theta) + D^2 \log L(\theta).(\tilde{\theta} - \theta) + (\tilde{\theta} - \theta)'.D^2 \log L(\theta).(\tilde{\theta} - \theta) + \dots$$

لكن بتوفر الشروط النظامية يكون الحد الثالث على يمين المعادلة أعلاه صغيرا جدا ومنه نعيد كتابتها على الشكل:

$$D\log L(\tilde{\theta}) \approx D\log L(\theta) + D^2 \log L(\theta).(\tilde{\theta} - \theta) + R_1 = 0 \dots\dots (5.71)$$

حيث تمثل R_1 القيمة الباقية وتكون العبارة $D^2 \log L(\theta)$ غير شاذة.

ومنه يمكن إعادة كتابة (71.5) على الشكل:

$$(\tilde{\theta} - \theta) \approx -\left[D^2 \log L(\theta)\right]^{-1}.D\log L(\theta) \dots\dots (5.72)$$

ومن المعادلة (56.5)، لدينا:

$$I(\theta) = E\left[-D^2 \log L(\theta)\right]$$

لنجد أن:

$$E\left[-n^{-1}D^2 \log L(\theta)\right] = n^{-1}I(\theta)$$

كما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}I(\theta)\right] \to Q$$

وبالرغم من أن العبارة أعلاه غير كافية لكي نثبت بأن $-n^{-1}D^2 \log L(\theta)$ تتقارب بالإحتمال إلى Q. فإننا نقول إذا كانت هذه النهاية Q موجودة. فمن الممكن جدا أن تساوي توقع المقدار أعلاه. ومنه نقول أنه تحت شروط معينة تكون:

$$\operatorname{plim}\left[-n^{-1}D^2 \log L(\theta)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}I(\theta)\right] = Q \dots\dots (5.73)$$

ومنـه نقـول إذا كـانت عبـارة المعادلـة (73.5) صحيحـة (محققـة) فإنـه من المعادلـة (72.5) نجد:

$$(\tilde{\theta}-\theta)\approx-\left[D^2\log L(\theta)\right]^{-1}.D\log L(\theta)$$
$$=\left[-n^{-1}D^2\log L(\theta)\right]^{-1}\left[n^{-1}D\log L(\theta)\right]$$
$$\rightarrow Q^{-1}.0=0$$

وهذا شريطة أن تكون الحدود الباقية R_1 متقاربة بالإحتمال إلى الصفر، لنجد أن:

$$p\lim(\tilde{\theta}-\theta)=0\Rightarrow p\lim(\tilde{\theta})=\theta$$

ومنه نقول بأن مقدر المعقولية العظمى $\tilde{\theta}$ هو مقدر متسق لـ θ. لتصبح لدينا:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)\approx\left[-n^{-1}D^2\log L(\theta)\right]^{-1}\left[n^{-1/2}D\log L(\theta)\right]$$

وإذا كانت:

$$a)\,n^{-1/2}D\log L(\theta)\xrightarrow{D}\eta\sim N(0,Q)$$
$$b)-n^{-1}D^2\log L(\theta)\xrightarrow{P}Q$$

ثم بإستعمال المعادلة (18.5) (نظرية Cramer) نجد:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)\xrightarrow{D}Q^{-1}\eta\sim N(0,Q^{-1}QQ^{-1})$$

أو:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)\xrightarrow{D}Q^{-1}\eta\sim N(0,Q^{-1})$$

ومنه نقول أنه بالنسبة للعينات الكبيرة والنهائية نكتب:

$$\tilde{\theta}\overset{A}{\sim}N(\theta,n^{-1}Q^{-1})\ldots\ldots(5.74)$$

ولإستعمال المعادلة (74.5) عمليا، من الضروري تعويض $n^{-1}Q^{-1}$ بتقريب لعينة نهائية مناسبة وذلك وفقا للخطوات التالية:

- $n^{-1}I(\theta)$ هي تقريب لـ Q.
- $n[I(\theta)]^{-1}$ هي تقريب لـ Q^{-1}.

• $[I(\theta)]^{-1}$ هي تقريب لـ $n^{-1}Q^{-1}$.

ونظرا لعدم معرفتنا لقيمة θ، فإننا نقول بأن $n[I(\tilde{\theta})]^{-1}$ هي مقدر متسق لـ Q^{-1} ومنه يمكن إستعمال $[I(\tilde{\theta})]^{-1}$ للعوض عن $n^{-1}Q^{-1}$ المعادلة (74.5)، ومنه نعيد كتابة (74.5) على الشكل:

$$\tilde{\theta} \overset{\wedge}{\sim} N[\theta, I^{-1}(\tilde{\theta})] \ldots\ldots (5.75)$$

ولمناقشة الكفاءة التقاربية لمقدر المعقولية العظمى $\tilde{\theta}$، نقول بأن:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta) \sim N[0, Q^{-1}]$$

والذي له نهاية مساوية لـ Q^{-1}، ثم للعتبر $\hat{\theta}$ مقدر ما للموجه θ ويحقق:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} B \sim N(0, \Sigma^{-1})$$

نقول عن $\tilde{\theta}$ بأنه مقدر المعقولية العظمى الكفؤ تقاربيا إذا تحقق:

$$\Sigma^{-1} - Q^{-1} = Z$$

حيث Z مصفوفة موجبة شبه محددة، وبعبارة أخرى لقول بأن مقدر المعقولية العظمى الذي يحقق الحد الأدنى لـ Cramer Rao يكون تباينه أصغر من أو يساوي تباين أي مقدر آخر غير متحيز تقاربيا.

5-3-5 مقدر المعقولية العظمى المقيد:

إن نتائج الإستنباط الإحصائي للموذج الإنحدار الخطي والمشتقة بالفصل الثالث تعتمد على الفرضية القائلة بأنه لاتوجد معلومات متوفرة مسبقا حول $\theta = (\beta, \sigma_u^2)$. ولكن نظرا لإهتمامنا بالنموذج الخطي العام تطرقنا إلى القيود الخطية فقط. ويمكن أن تكون لدينا معلومات إضافية أخرى مثل.القيود غير الخطية، القيود الصحيحة، القيود غير الصحيحة والقيود العشوائية. وسوف نتطرق في هذه الفقرة، للقيود الصحيحة فقط للمعلومات المسبقة حول الموجه β. أما المعلومات المسبقة حول σ_u^2 فهي صعبة الحصول.

a) القيود الخطية المسبقة على الموجه β:

لنفرض أنه لدينا معلومة مسبقة ذات m قيود خطية من الشكل:

$$R\beta = r$$

مع النموذج الخطي العام:

$$y = X\beta + U$$

وعند تقديرنا لموجه المعالم $\theta = (\beta, \lambda, \sigma_u^2)$، يمكن أخذ هذه القيود بعين الإعتبار عن طريق توسيع مفهوم دالة لوغاريتم دالة المعقولية $\log L$ لتحتوي على هذه القيود. ونحقق ذلك بتعريف الدالة اللاقرانجية التالية:

$$Q(\theta,\lambda,y,X) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}(y - X\beta)'(y - X\beta) - \lambda'(R\beta - r) \quad ....(5.76)$$

حيث أن λ هي $m \times 1$ موجه لمضاعفات لاغرانج. إن تعظيم (76.5) بالنسبة لـ β، σ_u^2، λ، يعطي النتائج:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_u^2}(X'y - X'X\beta) - R'\lambda = 0.....(1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma_u^4}(y - X\beta)'(y - X\beta) = 0.....(2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -(R\beta - r) = 0 \ldots\ldots(3)$$

إن ضرب المعادلة الأولى، للمشتقات الثلاثة أعلاه بـ $R(X'X)^{-1}$ والحل من أجل λ يعطي:

$$\tilde{\lambda} = \left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}.\left(R\tilde{\beta} - r\right) \ldots\ldots(5.77)$$

حيث أن $\tilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ هو مقدر المعقولية العظمى لـ β.

وبإعادة تعويض المعادلة (77.5) بنفس المشتقة الأولى أعلاه، نجد:

$$\tilde{\beta}_R = \tilde{\beta} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right) \ldots\ldots(5.78)$$

حيث أن: $\tilde{\beta}_R$ هو مقدر المعقولية العظمى المقيد.

ومنه يكون لدينا:

$$R\tilde{\beta}_R - r = 0 \ldots\ldots(5.79)$$

ومن معادلة الإشتقاق الثانية، أعلاه يمكن أن نحصل على مقدر المعقولية العظمى لـ σ_u^2 كما يلي:

$$\tilde{\sigma}_{Ru}^2 = \frac{1}{n}\left(y - X\tilde{\beta}_R\right)'\left(y - X\tilde{\beta}_R\right) \ldots\ldots(5.80)$$

$$= \frac{1}{n}\tilde{U}_R'\tilde{U}_R \ldots\ldots(5.81)$$

حيث أن:

$$\tilde{U}_R = y - X\tilde{\beta}_R$$

وللبحث في خصائص $\tilde{\Theta}_R = \left(\tilde{\beta}_R, \tilde{\sigma}_u^2, \tilde{\lambda}\right)$، نستعمل المعادلات (77.5)، (78.5)، (80.5) من أجل إشتقاق توزيعات مقدرات المعقولية العظمى المقيدة لموجه المعالم $\Theta = \left(\beta, \sigma_u^2, \lambda\right)$. إن $\tilde{\beta}_R$ و $\tilde{\lambda}$ هي دوال خطية لـ $\tilde{\beta}$، ومنه:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_R \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right] \ldots\ldots(5.82)$$

حيث أن:

$$K_1 = \beta - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r)$$

$$K_2 = \left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r)$$

$$A_{11} = \sigma_u^2\left[(X'X)^{-1} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right] = Cov(\tilde{\beta}_R),$$

$$A_{12} = A'_{21} = (X'X)^{-1}R'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} = Cov(\tilde{\beta}_R , \tilde{\lambda}).$$

$$A_{22} = \left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} = Cov(\tilde{\lambda})$$

ومنه، بإستعمال المعادلة (82.5) يمكن أن نستنتج:

a) لما $R\beta = r$ فإن $E(\tilde{\beta}_R) = \beta$ وكذلك $E(\tilde{\lambda}) = 0$، أي أن $\tilde{\beta}_R$ و $\tilde{\lambda}$ هما مقدران غير متحيزين لـ β والصفر على الترتيب.

b) أن $\tilde{\beta}_R$ و $\tilde{\lambda}$ هما مقدرين كاملي الكفاءة Fully efficient لـ β و λ مادام تباينيهما يحققان الحدود الدنيا لمتراجحة Cramer Rao مثلما تؤكده مباشرة مصفوفة المعلومات الموسعة:

$$I(\beta, \lambda, \sigma_u^2) = \begin{bmatrix} \dfrac{X'X}{\sigma_u^2} & R' & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{n}{2\sigma_u^4} \end{bmatrix} \ldots\ldots(5.83)$$

c) إن مصفوفة التباين المشترك لمقدر المعقولية العظمى المقيد $\tilde{\beta}_R$ تكون دائما أقل أو تساوي مصفوفة التباين المشترك لمقدر المعقولية العظمى غير المقيد $\tilde{\beta}$ مهما كانت $R\beta = r$ أو غير ذلك، أي:

$$\left[cov(\tilde{\beta}_R) - cov(\tilde{\beta})\right] \le 0 \ldots\ldots(5.84)$$

ولكن

$$\left[MSE(\tilde{\beta}_R) - MSE(\tilde{\beta})\right] \geq 0$$

حيث أن: MSE هي وسط مربع الخطأ.

وبناءا على المعادلة (80.5) يمكن إعادة كتابة مقدر المعقولية العظمى لـ σ_u^2 على الشكل:

$$\tilde{\sigma}_{uR}^2 = \tilde{\sigma}_u^2 + \frac{1}{n}\left(R\tilde{\beta} - r\right)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right) \ldots\ldots(5.85)$$

ومن تعريف $\tilde{U}_R$ بالمعادلة (81.5) لدينا:

$$\tilde{U}_R = \tilde{U} - X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right) \ldots\ldots(5.86)$$

ثم لدينا:

$$*\frac{RSS}{\sigma_u^2} = \frac{n\tilde{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{(n-k)} \ldots\ldots(5.87)$$

$$*\left(R\tilde{\beta} - r\right)'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right) \sim \chi^2_m \ldots\ldots(5.88)$$

ثم لنعود للمعادلة (85.5) ونضرب طرفيها بـ $\frac{n}{\sigma_u^2}$ لنجد:

$$\frac{n\tilde{\sigma}_{uR}^2}{\sigma_u^2} = \frac{n\tilde{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2} + \left(R\tilde{\beta} - r\right)'\left[\sigma_u^2 R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right)$$

وباستعمال نتائج المعادلتين (87.5) و(88.5) تصبح المعادلة الأخيرة أعلاه:

$$\frac{n\tilde{\sigma}_{uR}^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{(n-k)} + \chi^2_m = \chi^2_{(n+m-k)} \ldots\ldots(5.89)$$

وواضح من التعريف الخاص ببواقي المعقولية العظمى المقيدة $\tilde{U}_R$ بالمعادلة (86.5) حيث أن $\tilde{U}_R$ مستقل عن $\tilde{U}$ نلاحظ أن:

$$E(\tilde{\sigma}_{uR}^2) \neq \sigma_u^2$$

ولكن بناءا على توزيع المعادلة (89.5) ولما $R\beta - r = 0$ نعرف:

$$\tilde{S}_u^2 = \frac{1}{n+m-k}.\tilde{U}'_R U'_R \quad \text{.........(5.90)}$$

والتي تحقق:

$$E(\tilde{S}_u^2) = \sigma_u^2$$

وللعود لمقدر المعقولية العظمى المقيد بالمعادلة (78.5)، وباستعمال المعادلة (82.5) نجد:

$$\tilde{\beta}_R - \tilde{\beta} = -(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\beta} - r\right)$$

$$\tilde{\beta}_R - \beta = (X'X)^{-1}U - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}X'U$$

$$\tilde{\beta}_R - \beta = \left[I - (X'X)^{-1}R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1}R\right](X'X)^{-1}X'U$$

$$\tilde{\beta}_R - \beta = HAU \quad \text{.........................(5.91)}$$

حيث أن:

$$H = I - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R$$

$$A = (X'X)^{-1}X'$$

ومنه يكون:

$$E(\tilde{\beta}_R - \beta) = 0 \Rightarrow E(\tilde{\beta}_R) = \beta$$

أما التباين:

$$\text{var}(\tilde{\beta}_R - \beta) = \text{var}(\tilde{\beta}_R) = \sigma_u^2 H(X'X)^{-1}H' = \sigma_u^2 H(X'X)^{-1}$$

ثم لما $n \to \infty$ تصبح:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}(\tilde{\beta}_R - \beta)\right] = 0$$

ثم لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sigma_u^2 H\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\right] =$$

$$\sigma_u^2 \lim_{n\to\infty}\left[(n^{-1}X'X)^{-1} - (n^{-1}X'X)^{-1}R'\left(R(n^{-1}X'X)^{-1}R'\right)^{-1}R(n^{-1}X'X)^{-1}\right]$$

$$= \sigma_u^2\left[Q^{-1} - Q^{-1}R'\left[RQ^{-1}R'\right]^{-1}RQ^{-1}\right]$$

ومنه، نستنتج أن:

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\beta}_R - \beta\right) \xrightarrow{D} P\eta \sim N\left(0, \sigma_u^2 P\right).....(5.92)$$

حيث أن:

$$P = Q^{-1} - Q^{-1}R'\left[RQ^{-1}R'\right]^{-1}RQ^{-1}.......(5.93)$$

وكذلك:

$$PQP = P$$

$$Q = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-1}X'X\right)$$

ومنه لنعمم الفكرة بالنسبة لوجود القيود الخطية على الشكل: $R\theta = r$. لتكون دالة لاقرانج الموسعة لدالة المعقولية على النحو:

$$Q = \log L(\theta) - \lambda'(R\theta - r)$$

وبالإشتقاق نجد:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = D\log L(\theta) - R'\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -(R\theta - r) = 0$$

حيث أن $\theta = \left(\beta, \lambda, \sigma_u^2\right)$، وليكون موجه مقدرات المعقولية العظمى المقيدة هو:

$$\tilde{\theta}_R = \tilde{\theta} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\tilde{\theta} - r\right)$$

ونستنتج من المعادلة (92.5) أن:

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_R - \theta\right) \xrightarrow{D} P\eta \sim N(0, P)......(5.94)$$

حيث أن P معرف في (93.5)، وكذلك:

$$\eta \sim N(0, Q)$$

كما أن:

$$Q = \lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}I(\theta)\right]$$

و $I(\theta)$ معرفة بالمعادلة (83.5).

b) القيود غير الخطية والصحيحة على β:

تتأخذ حالة القيود الدقيقة وغير الخطية ونعتبر الحالة التي تكون فيها المعلومة المسبقة تأتي من موجه $m \times 1$ لقيود غير خطية مثل:

$$\beta_1 = \beta_4/(\beta_6 + \beta_8);$$

$$\beta_1 = -\beta_2^2;$$

$$\beta_5 . \beta_3 = 1/\beta_7$$

ومنه تكون القيود على الشكل $h_i(\beta) = 0$ حيث $i = 1,2,\dots\dots,m$ ونكتبها في صيغة مصفوفات:

$$H(\beta) = 0 \dots\dots (5.95)$$

ومن أجل التأكد من الإستقلال فيما بين m قيود نفرض أن:

$$\text{Rank}\left(\frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta}\right) = m \dots\dots (5.96)$$

ومثلما عملنا في حالة القيود الخطية نضع القيود على الشكل:

$$H_0 : H(\beta) = 0$$

$$H_A : H(\beta) \neq 0$$

ولما H_0 صحيحة نتوقع أن يكون $H(\tilde{\beta}) \approx 0$ [7]. ومنه يصبح المشكل هو كيفية تكوين الإختبار الإحصائي المعتمد على المسافة:

$$\left\| H(\tilde{\beta}) - \theta \right\|$$ [8]

7- أنظر:

Aris SPANOS, Chap 19, Section (19.5) pages 392-402

8- أنظر نفس المرجع السابق الصفحة 428.

وبإتباع نفس الخطوات المذكورة بالفصل الثالث والرابع، يمكن تحويل المعادلة (97.5) إلى:

$$H(\tilde{\beta})'\left[\text{cov}\left(H(\tilde{\beta})\right)\right]^{-1} H(\tilde{\beta}).........(5.98)$$

إن المشكل مع العبارة (98.5) هو أننا لانعرف توزيعها ومنه لاتصلح للإختبار الإحصائي لأن توزيع $H(\tilde{\beta})$ غير طبيعي والذي يعتبر دالة غير خطية لـ $\tilde{\beta}$. ولكن إذا إستطعنا تحويل $H(\tilde{\beta})$ إلى صيغة خطية يمكن تطبيق أو إقتراح إختبار إحصائي معين مثل F.

إن تحويل $H(\tilde{\beta})$ إلى صيغة خطية، يمكن أن يحصل عن طريق أخذ الدرجة الأولى لتوسيعات تايلور عند الموجه β، أي:

$$H(\tilde{\beta}) = H(\beta) + \frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta}(\tilde{\beta} - \beta) + R_1.....(5.99)$$

حيث R_1 يمثل قيمة الحدود الباقية والتي تكون تقاربيا بجانب الصفر.

إذا أهملنا كل القيم التي تأتي في الدرجة الأولى من توسيعات تايلور بالمعادلة (99.5) فإن نتائجنا المعتمدة على هذه المعادلة تكون تقاربيا صحيحة فقط. ومنه إذا كانت:

$$\sqrt{n}(\tilde{\beta} - \beta) \overset{A}{\sim} N(0, \sigma_u^2 Q^{-1}).....(5.100)$$

يمكن أن نستنتج بإستعمال المعادلة (18.5) أن:

$$\sqrt{n}\left[H(\tilde{\beta}) - H(\beta)\right] \overset{A}{\sim} N\left[0, \sigma_u^2 \left(\frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta}\right) Q^{-1} \left(\frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta}\right)'\right].....(5.101)$$

ونستلزم هذه النتيجة أنه إذا عوضنا التباين المشترك التقاربي $\left[\text{cov}_A \; H(\tilde{\beta})\right]$ بالمعادلة (98.5)) يمكن أن نحصل على توزيع تقاربي لأن:

$$nH(\tilde{\beta})'\left[\text{cov}_A \; H(\tilde{\beta})\right]^{-1}.H(\tilde{\beta}) \sim \chi_m^2 ......(5.102)$$

حيث أن:

$$cov_A(\tilde{\beta}) = \sigma_u^2\left[\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)Q^{-1}\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)'\right]$$

ونظرا إلى عدم معرفتنا لـ β و σ_u^2 ومعرفة مثلا: $\tilde{\sigma}_u^2 \xrightarrow{P} \sigma_u^2$ يمكن أن نكتب:

$$\tilde{\sigma}_u^2\left[\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)(n^{-1}X'X)^{-1}\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)'\right] \xrightarrow{P} cov_A(\tilde{\beta}) \quad ....(5.103)$$

حيث أن:

$$\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta} = \left.\frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta}\right|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

ومنه يمكن تكوين الإختبار الإحصائي:

$$\left[H(\tilde{\beta})\right]'\left[\tilde{\sigma}_u^2\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)(X'X)^{-1}\left(\frac{\partial H(\tilde{\beta})}{\partial \beta}\right)'\right]^{-1} .H(\tilde{\beta}) \sim \chi_m^2 \quad .....(5.104)$$

ويمثل هذا الإختبار التقاربي إختبار Wald والذي سنتطرق إليه مع مجموعة الإختبارات المناسبة الأخرى لاحقا.

4-5 إجراء الإختبارات التقاربية:

إن المشكل الأساسي لإختبار الفرضيات هو بناء إختبار إحصائي نكون نعرف توزيعه في ظل فرضيتي العدم H_0 والبديل H_A ولايعتمد على موجه المعالم غير المعروفة Θ. وسوف ندرس هنا ثلاثة إختبارات مشهورة في أدبيات القياس الإقتصادي والخاصة بالعينات الكبيرة. وتستعمل هذه الإختبارات المعلومات المتعلقة بدالة لوغاريتم المعقولية. حيث تكون مختلفة في العينات الصغيرة ولكن تقاربيا تكون متكافئة.

5-4-1 إختبار Wald:

إن الهدف هنا هو إختبار وجود المجموعة m من القيود الخطية المستقلة والمكتوبة على الشكل: $R\theta = r$. حيث θ هي $m \times 1$ موجه معالم. إن فرضيتنا الأساسية هي أنه لدينا نموذج يحقق:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} Q^{-1}\eta \sim N(0, Q^{-1})$$

حيث أن:

$$Q = \lim_{n \to \infty}\left(n^{-1} I(\theta)\right)$$

ولدينا:

$$\sqrt{n}R(\tilde{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} RQ^{-1}\eta \sim N(0, RQ^{-1}R')$$

وتحت H_0 صحيحة: $R\theta = r$ لدينا:

$$\sqrt{n}(R\tilde{\theta}-r) \xrightarrow{D} RQ^{-1}\eta \sim N(0, RQ^{-1}R')$$

ومنه يصبح:

$$n(R\tilde{\theta}-r)'\left[RQ^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{\theta}-r) \xrightarrow{D} \chi^2 \sim \chi^2_m$$

$$\Rightarrow (R\tilde{\theta}-r)'\left[R(n^{-1}Q^{-1})R'\right]^{-1}(R\tilde{\theta}-r) \xrightarrow{D} \chi^2 \sim \chi^2_m$$

عليا نعوض $n^{-1}Q^{-1}$ بواسطة $I^{-1}(\tilde{\theta})$. ومنه يكون الإختبار:

$$H_0 : R\theta = r : W = (R\tilde{\theta}-r)'\left[RI^{-1}(\tilde{\theta})R'\right]^{-1}(R\tilde{\theta}-r) \overset{A}{\sim} \chi^2_m \quad \ldots (5.105)$$

إن أهم خاصية لهذا الإختبار هو أنه يعتمد مباشرة على مقدرات المعالم غير المقيدة $(\tilde{\theta})$. وهذا ما يميزه عن بقية الإختبارات الأخرى.

2-4-5 إختبار نسبة المعقولية "Likelihood Ratio" (L.R. Test):

لدينا القيود الخطية: $H_0: R\theta = r$

ولتكن $L(\tilde{\theta}_R)$ تعني نموذج المعقولية المناسب للقيود المفروضة على النموذج المدروس. و$L(\tilde{\theta})$ هي المعقولية العظمى للنموذج غير المقيد. تكون نسبة المعقولية λ معرفة كمايلي:

$$\lambda = \frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})}$$

حيث: $0 \leq \lambda \leq 1$، ومنه يكون إختبار المعقولية كمايلي:

$$LR = -2\log\lambda = 2\log L(\tilde{\theta}) - 2\log L(\tilde{\theta}_R) \ldots\ldots (5.106)$$

وللحصول على نهاية التوزيع لـ LR تحت H_0 صحيحة نتبع خطوتين:

1) نستعمل توسيعات سلسلة تايلور $\log L(\tilde{\theta}_R)$ حول $\tilde{\theta}$.

$$\log L(\tilde{\theta}_R) \approx \log L(\tilde{\theta}) + D\log L(\tilde{\theta})'(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta}) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})' D^2 \log L(\tilde{\theta})(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})$$

إذا كانت H_0 صحيحة، يجب أن تكون $\tilde{\theta}_R$ قريبة من $\tilde{\theta}$. أما الحدود الباقية فتقترب من الصفر. وبمعرفة $D\log L(\tilde{\theta}) = 0$. تصبح:

$$LR = 2\log(\tilde{\theta}) - 2\log L(\tilde{\theta}_R) = (\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})'\left[-D^2 \log L(\tilde{\theta})\right].(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})$$

$$\Rightarrow LR = (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R)'\left[-D^2 \log L(\tilde{\theta})\right].(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R) \ldots\ldots (5.107)$$

2) بينا من قبل أنه من أجل وجود القيود الخطية، فإن:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta}) \xrightarrow{D} P\eta \sim N(0, P)$$

حيث P معرفة من قبل بالمعادلة (93.5). وفي ظل $R\theta = r$ يكون توزيع المقدر المقيد:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_R - \theta) \xrightarrow{D} P\eta \sim N(0,P)$$
$$\eta \sim N(0,Q)$$

بينما بالنسبة للمقدار غير المقيد:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} Q^{-1}P$$

ومنه نستنتج الفرق $\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R)$ على الشكل التالي:

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R) \xrightarrow{D} (Q^{-1} - P)\eta \sim N\left[0,(Q^{-1} - P)Q(Q^{-1} - P)\right]$$

ومن تعريف P سابقا: $P = PQP$ نستنتج أن:

$$(Q^{-1} - P)Q(Q^{-1} - P) = Q^{-1} - P$$

حيث أن هذه المصفوفة شاذة، ولكن نعممها باستعمال χ^2 تحت H_0:

$$n(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R)'Q(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R) \xrightarrow{D} \chi^2 \sim \chi^2_m$$

لأن Q هي المقلوب العام لـ $(Q^{-1} - P)$ ومنه نكتب صيغة الإختبار:

$$LR = n(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R)'\left[-n^{-1}D^2 \log L(\tilde{\theta})\right].(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R) \sim \chi^2_m ....(5.108)$$

5-4-3 إختبار مضاعف لاغرانج "Lagrange Multiplier" (L.M Test):

لنفرض أنه لدينا مجموعة من القيود الخطية تحت H_0 ويكون الإختبار كما يلي:

$$L.M = D\log L(\tilde{\theta}_R)'\left[I(\tilde{\theta}_R)\right]^{-1}.D\log L(\tilde{\theta}_R)......(5.109)$$

إذا كانت H_0 صحيحة نتوقع أن تقترب $\tilde{\theta}_R$ حول $\tilde{\theta}$. ومنه فإن توسيعات سلسلة تايلور $D\log L(\tilde{\theta}_R)$ حول $\tilde{\theta}$ تعطى بالتعريف كما يلي:

$$D\log L(\tilde{\theta}_R) \approx D\log L(\tilde{\theta}) + D^2 \log L(\tilde{\theta})(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})$$

و ما دام $D\log L(\tilde{\theta}) = 0$ تصبح:

$$D\log L(\tilde{\theta}_R) \approx D^2 \log L(\tilde{\theta})(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})$$

لينتج:

$$LM = (\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})' D^2 \log L(\tilde{\theta})' \left[I(\tilde{\theta}_R)\right]^{-1} . D^2 \log L(\tilde{\theta}).(\tilde{\theta}_R - \tilde{\theta})$$

$$LM = (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R)' D^2 \log L(\tilde{\theta})' \left[I(\tilde{\theta}_R)\right]^{-1} D^2 \log L(\tilde{\theta}).(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_R) \quad (5.110)$$

ونخلص القول إلى أن [9]:

W = يحتوي على مقدرات غير مقيدة فقط H_A.

LM = يحتوي على مقدرات مقيدة فقط H_0.

LR = يحتوي على كليهما.

$$W \geq LR \geq LM$$

9- للتعمق أكثر في:

- A C HARVEY 1981. Chap 5. pages 144-187 (مرجع سابق)
- L G Gold Frey 1988. "Mispecification Tests in Econometrics" Cambridge University Press Chapters 1,2,3

5-5 التقدير بالمتغيرات الأدواتية "Instrumental Variable Estimation" (I.V.E)

بالرغم من أن التقدير بطريقة المعقولية العظمى يوفر عدة مزايا نظرية. فإن تلك الخصائص المحصل عليها تعتمد على فرضيات تخصيص النموذج الكامل والخالي من أخطاء التخصيص التي تواجهنا في الحياة الميدانية. حيث نادرا مايكون ذلك صحيحا. ونظرا للمشاكل الناتجة عن ذلك فإننا نعتبر الطريقة البديلة والمعتمدة على المتغير الأداتي والتي تتحاشى المشاكل التي تنتج (تظهر) لما تكون بعض المحددات مرتبطة في نهايتها مع وحدات (عناصر) موجه الأخطاء. ولنفرض النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

مع الأخطاء:

$$U_t \sim I.I.D(0, \sigma_u^2)$$

حيث أن عمودا أو أكثر من أعمدة X تحتوي على عناصر عشوائية. ومنه نفرض أن:

$$i)\ p\lim(n^{-1}X'X) = Q$$

$$ii)\ p\lim(n^{-1}X'U) = q$$

حيث أن Q مصفوفة غير شاذة. وعندما يكون عمود أو أكثر من أعمدة X مرتبطا بالنهاية مع الأخطاء تكون:

$$p\lim\left[n^{-1}\sum X_{ji}U_t\right] \neq 0$$

ومنه فإن q ليست موجه أصفار. وتكون مقدرات المربعات الصغرى العادية غير متسقة. وللحصول على مقدر متسق، يمكن أن نفرض بأن W $(n \times p)$ مصفوفة متغيرات مستقلة بحيث أن $p \geq k$ وكذلك تحقق:

$$a.\quad p\lim(n^{-1}W'U) = 0$$

$$b.\quad p\lim(n^{-1}W'X) = Q_{wx}$$

$$c.\quad p\lim(n^{-1}W'W) = Q_{ww}$$

حيث أن Q_{WW} مصفوفة غير شاذة، $Rank(Q_{WW}) = K$.

يتطلب الشرط الأول (a) بأن تكون أعمدة W غير مرتبطة مع U نهائيا.

أما الشرط الثاني (b) فهو أكثر تقنية، حيث يتطلب بعض الإرتباط النهائي بين مصفوفتي المتغيرات المستقلة X و W. أما الشرط الثالث (C)، فيهتم بتقارب عزوم العينة لمجموعة المتغيرات المحدرة والمطبقة هنا على المتغيرات في W.

ولنعتبر الأن تقنية التقدير بواسطة المتغيرات الأدواتية (IVE). وعوضا عن تحدير y في X، فإننا أولا، نحدر المتغيرات X في المتغيرات W، ثم نأخذ القيم التقديرية $\hat{X}$. ثم نحدر y في $\hat{X}$، بدلا من X، لنحصل على مقدر المتغيرات الأدواتية لـ β. بحيث يجب أن تكون $W'W$ غير شاذة. ويجري التقدير كمايلي:

في النموذج الخطي العام $y = X\beta + U$، نحدر المتغيرات X في المتغيرات الأدواتية W كمايلي:

$$X = W\gamma + U......(5.111)$$

ثم بتطبيق المربعات الصغرى على النموذج (111.5) نجد:

$$X = Wb + \hat{U} = \hat{X} + \hat{U}$$

ولنضرب هذه النتيجة الأخيرة بمصفوفة المتغيرات الأدواتية W' لنجد:

$$b = (W'W)^{-1}W'X......(5.112)$$

ولتصبح لدينا:
$$\hat{X} = Wb = W(W'W)^{-1}W'X = P_W X$$

حيث أن:
$$P_W = W(W'W)^{-1}W'$$

ثم نحدر y في مصفوفة القيم التقديرية $\hat{X}$ لنحصل على مقدر المتغيرات الأدواتية كمايلي:

$$y = \hat{X}\beta + U \Rightarrow \tilde{y} = \hat{X}\tilde{b}$$

$$y = \tilde{y} + \tilde{U} = \hat{X}\tilde{b} + \tilde{U}$$

$$\hat{X}'y = \hat{X}'\hat{X}\tilde{b} + \hat{X}'\tilde{U}$$

$$\tilde{b} = (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'y$$

ومن تعريف $\hat{X} = P_w X$، ينتج لدينا $P_w = P'_w = P'_w P_w$، ويكون مقدر المتغيرات الأدواتية $\tilde{b}$ على الشكل التالي:

$$\tilde{b} = (X'P'_w P_w X)^{-1}.X'P'_w y.......(5.113)$$

أو على النحو:

$$\tilde{b} = \left[X'W(W'W)^{-1}W'X\right]^{-1}X'W(W'W)^{-1}W'y.......(5.114)$$

وإذا كانت أعمدة المصفوفة W متساوية مع أعمدة X فإن $Rank(WX) = k$ ومنه يكون مقدر المتغيرات الأدواتية على الشكل:

$$\tilde{b} = (W'X)^{-1}W'y.......(5.115)$$

وهو الشكل المختصر للمعادلة (114.5) حيث نسمي مقدر المتغيرات الأدواتية بالمعادلة (115.5) بمقدر المتغيرات الأدواتية البسيط.

مثال (3.5)

للتعرف على كيفية إختبار المتغيرات الأدواتية، نعتبر دالة الإستهلاك الكينزية مع معادلة تعريف الدخل كمايلي:

$$C_t = \alpha + \beta Yd_t + u_t$$

$$Yd_t = C_t + Z_t$$

حيث أن:

C_t= الإنفاق الإستهلاكي

Yd_t= الدخل المتاح (مجموعات الإنفاق الإستهلاكي وغير الإستهلاكي - ضرائب الدخل).

Z_t= الإنفاق غير الإستهلاكي - الضرائب على الدخل.

ومادامت C_t تعتمد على u_t و Yd_t تعتمد على C_t، نستنتج أن Yd_t و u_t مرتبطين وتحت الفرضيات الأساسية المعروفة نحصل من تطبيق قانون المربعات الصغرى العادية على هذا النموذج، على مقدرات غير متسقة لكل من α و β.

إذا إعتبرنا Z_t متغير خارجي، فإن الملاحظات Z_t يمكن إعتبارها غير عشوائية (أي مثبتة). وإذا وضعنا فرضيات أساسية حول تقارب المقدار $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Z_t^2$ فإنه ينتج:

$$\text{plim}\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Z_t U_t \right) = 0$$

إن هذا معناه أن Z_t هي المتغيرة الأدواتية المناسبة، ومنه فإنه يمكن الحصول على مقدر المتغيرات الأدواتية (I.V.E). أولا عن طريق تحدير Yd_t في Z_t مع حد ثابت وأخذ القيم التقديرية $\hat{Y}d_t$. ثم نحدر C_t في $\hat{Y}d_t$ مع حد ثابت للحصول على مقدر المتغيرات الأدواتية لـ α و β.

1-5-5 الخصائص الإحصائية لمقدر المتغيرات الأدواتية:

بتوفر الشروط الثلاثة a، b، c، المذكورة سابقا يمكن أن نبين بأن مقدر المتغيرات الأدواتية، $\tilde{b}$، متسق حيث لدينا:

$$\tilde{b} = \left[X'W(W'W)^{-1}W'X\right]^{-1} X'W(W'W)^{-1}W'y$$

$$= \beta + \left[X'W(W'W)^{-1}W'X\right]^{-1} X'W(W'W)^{-1}W'U$$

$$\tilde{b} = \beta + \left[(n^{-1}X'W)(n^{-1}W'W)^{-1}(n^{-1}W'X)\right]^{-1}(n^{-1}X'W)(n^{-1}W'W)^{-1}(n^{-1}W'U)$$

و ما دام كل حد على حده للمعادلة أعلاه له نهاية إحتمال معروفة فإن:

$$p\lim(\tilde{b}) = \beta + \left[Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right]^{-1} Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow p\lim(\tilde{b}) = \beta$$

ومنه نقول، عند الحصول على المتغيرات الأدواتية المناسبة، فإن $\tilde{b}$ يكون متسقا.

ولنفرض أن $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} W'U\right)$ تتقارب بالتوزيع إلى الموجه العشوائي η كمايلي:

$$n^{-1/2} W'U \xrightarrow{D} \eta \sim N\left(0, \sigma^2_u Q_{ww}\right)$$

وبإستعمال المعادلة (18.5) –نظرية Cramer– ينتج:

$$\sqrt{n}\left(\tilde{b} - \beta\right) \xrightarrow{D} \left[Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right]^{-1} Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot \eta \ldots\ldots(5.116)$$

$$\sqrt{n}\left(\tilde{b} - \beta\right) \sim N\left[0, \sigma^2_u \left(Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right)^{-1}\right] \ldots\ldots(5.117)$$

رغم أن مصفوفة التباين أعلاه تظهر معقدة، فإنه ليس صعبا تطبيق هذه النتيجة على العينات الكبيرة النهائية لأن المقدار $\left[Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right]$ هو نهاية الإحتمال للعبارة $\left[n^{-1}\hat{X}'\hat{X}\right]$ ومنه فإنه عند العينات الضخمة والمتناهية يكون:

$$\tilde{b} \overset{A}{\sim} N\left[\beta, \sigma^2_u n^{-1} \left(Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right)^{-1}\right] \ldots\ldots(5.118)$$

ومن ثم يمكن تعويض المقدار $\left[\left(Q'_{wx} \cdot Q^{-1}_{ww} \cdot Q_{wx}\right)^{-1}\right]$ بالمقدار المتسق $\left[\left(n^{-1}\hat{X}'\hat{X}\right)^{-1}\right]$ ليعطي:

$$\tilde{b} \overset{A}{\sim} N\left[\beta, \sigma^2_u \left(\hat{X}'\hat{X}\right)^{-1}\right] \qquad n \to \infty \ldots\ldots(5.119)$$

وللحصول على نتيجة عملية يجب تعويض σ^2_u بمقدر متسق:

$$\tilde{\sigma}^2_{IVE} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{U}^2_i \Big/ (n - k) \ldots\ldots(5.120)$$

أو على الشكل:

$$\hat{\sigma}^2_{IVE} = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 / n.....(5.121)$$

حيث أن $\hat{U}_i$ هو بواقي المتغيرات الأدواتية ويعرف كمايلي:

$$\hat{U} = Y - X\hat{b}......(5.122)$$

5-5-2 حساب بواقي المتغيرات الأدواتية:

من الواضح أننا نحصل على مقدرات المتغيرات الأدواتية بواسطة تحدير X في المتغيرات الأدواتية W. ثم الحصول على القيم التقديرية $\hat{X}$. بعدها نحدر Y في هذه القيم التقديرية $\hat{X}$. إن هذه الطريقة تعطي مقدرات المتغيرات الأدواتية الحقيقية والصحيحة. لكن بعض النتائج الإحصائية تكون غير صحيحة مادامت الخطوة الثانية للانحدار تحسب أوتوماتيكيا البواقي على الشكل التالي:

$$\hat{U} = y - \hat{X}\hat{b}......(5.123)$$

بينما بواقي المتغيرات الأدواتية الصحيحة هي:

$$\tilde{U} = y - X\tilde{b}......(5.124)$$

حيث عوضنا في المعادلة (124.5). $\hat{X}$ بقيمتها الأصلية من أجل الحصول على موجه البواقي $\hat{U}$. فإذا طبقنا طريقة المربعات الصغرى العادية مرتين. تكون البواقي كما في المعادلة (123.5). ومنه فإن النتائج الإحصائية $SE(.)$. الإختبار t. معامل التحديد المضاعف R^2. ومقاييس إحصائية أخرى تكون محسوبة بطريقة غير صحيحة. وبواسطة برنامج خاص ومخصص مباشرة لطريقة التقدير بواسطة المتغيرات الأدواتية. أو طريقة خطوتين للمربعات الصغرى (2SLS). يمكن من حساب البواقي بطريقة صحيحة كما في المعادلة (124.5).

5-5-3 القيود الخطية الصحيحة:

لنعتبر مشكلة إختبار مجموعة m من القيود الخطية والمستقلة والمكتوبة على الشكل: $R\beta = r$. ولما تكون مقدرات المعالم محصل عليها بطريقة المتغيرات الأدواتية نعرف:

$$A = \left[Q'_{wx} . Q^{-1}_{ww} . Q_{wx}\right]^{-1} . Q'_{wx} . Q^{-1}_{ww}$$

ومنه تصبح:

$$\sqrt{n}(\tilde{b} - \beta) \xrightarrow{D} A\eta \sim N(0, \sigma^2_u A Q_{ww} A')$$

وبإدخال القيود الخطية $R\beta = r$. فإن:

$$\sqrt{n}R(\tilde{b} - \beta) \xrightarrow{D} RA\eta \sim N(0, \sigma^2_u RAQ_{ww}A'R')$$

وتحت H_0 صحيحة $(R\beta = r)$ تصبح:

$$\sqrt{n}(R\tilde{b} - r) \xrightarrow{D} RA\eta \sim N(0, \sigma^2_u RAQ_{ww}A'R') \ldots (5.125)$$

ومنه يكون:

$$n(R\tilde{b} - r)'[RAQ_{ww}A'R']^{-1}(R\tilde{b} - r)/\sigma^2_u \xrightarrow{D} \chi^2 \sim \chi^2_m \ldots (5.126)$$

حيث أن: $\text{plim}\left(\frac{\hat{X}'\hat{X}}{n}\right)^{-1} = AQ_{ww}A'$. ومنه تكون (126.5) في العينات الكبيرة وفي ظل القيود الخطية $H_0: R\beta = r$ على الشكل:

$$(R\tilde{b} - r)'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r)/\sigma^2_u \overset{A}{\sim} \chi^2_m \ldots (5.127)$$

5-5-4 حساب الإختبارات الإحصائية في ظل القيود الخطية $R\beta = r$:

إن الإختبار الإحصائي بالمعادلة (127.5). يتشابه مع ذلك المحصل من طريقة التقدير بواسطة المربعات الصغرى العادية بالفصل الثالث. حيث تقوم طريقة المربعات الصغرى العادية بتصغير العبارة:

$$S(\beta) = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

تبعا للقيود الخطية وموجه المعالم β. بينما تقوم طريقة المتغيرات الأدواتية بتصغير العبارة:

$$S_{IV}(\beta) = (y - X\beta)' W(W'W)^{-1}W'(y - X\beta)$$

$$= (y - X\beta)' P_W(y - X\beta).....(5.128)$$

وتعطي الشروط الأولى لتصغير العبارة (128.5) ما يلي:

$$X'P_W(y - X\beta) = 0$$

والقيمة المحققة لهذه المساواة أعلاه هي مقدر المتغيرات الأدواتية $\tilde{b}$. حيث أن شروط التعامد لمقدر المتغيرات الأدواتية غير المقيد هي:

$$X'P_W\tilde{U} = \hat{X}'\tilde{U} = 0$$

و $\tilde{U}$ معرف بالمعادلة (122.5) وهو موجه بواقي المتغيرات الأدواتية غير المقيدة. وإذا قمنا بتصغير العبارة (128.5) تبعا للقيود $R\beta = r$. فمن الممكن الحصول على مقدر المتغيرات الأدواتية المقيد (RIVE) على الشكل:

$$\tilde{b}_R = \tilde{b} - (\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r)......(5.129)$$

ومنه لنعتبر أن $\tilde{U}_R$ هو بواقي المتغيرات الأدواتية المقيدة (RIVR) يكون:

$$\tilde{U}_R = y - X\tilde{b}_R = \tilde{U} - X(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r).....(5.130)$$

ولما نكون مجموع المربعات $\tilde{U}'_R \; \tilde{U}_R$. فإن ضرب الحدود المتقاطعة ليمين المعادلة (130.5) لا تختفي مادام $X'\tilde{U} \neq 0$. ومنه فإن الفرق:

$$\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}'\tilde{U} \neq (R\tilde{b} - r)'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r) \sim \chi^2_m$$

وللحصول على قانون يشبه ذلك المحصل عليه من طريقة المربعات الصغرى. يجب الإعتماد على دالة الأخطاء لطريقة المتغيرات الأدواتية وهي:

$$S_{IV}(\beta) = (y - X\beta)'P_W(y - X\beta)$$

إن مجموع المربعات المناسبة لهذه الدالة يجزأ كما يلي:

$$\tilde{U}'_R P_W \tilde{U}_R = \tilde{U}'P_W\tilde{U} + (R\tilde{b} - r)'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r)$$

ومنه يمكن حساب المعادلة:

$$(R\tilde{b} - r)'\left[R(\hat{X}'\hat{X})^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{b} - r)/\sigma^2_u \sim \chi^2_m$$

كما يلي:

$$S_{IV}(\tilde{b}_R) - S_{IV}(\tilde{b}) = \tilde{U}'_R P_W \tilde{U}_R - \tilde{U}'P_W\tilde{U}$$

لنحصل في الأخير على:

$$\frac{S_{IV}(\tilde{b}_R) - S_{IV}(\tilde{b})}{\sigma^2_u} \sim \chi^2_m$$

6-5 سلسلة تمارين حول الفصل الخامس

التمرين الأول:

لتكن $\hat{\theta}_n$ مقدرة θ. وليكن خطأ المعاينة من الشكل:

$$\hat{\theta}_n - \theta = \left[\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right] + \left[E(\hat{\theta}_n) - \theta\right] = a_n + b_n$$

a) إذا كانت السلسلة العشوائية a_n لها نهاية إحتمال معروفة ونهائية، والسلسلة غير العشوائية b_n لها كذلك نهاية معرفة، فأثبت أن:

$$p\lim(a_n + b_n) = p\lim(a_n) + p\lim(b_n)$$

b) إذا كان $\hat{\theta}_n$ متحيزا، فبين بأن التحيز يتقارب إلى الصفر لما $n \to \infty$.

c) بناءا على (b)، أعلاه، بين بأن تباين $\hat{\theta}_n$ يتقارب إلى الصفر لما $n \to \infty$.

d) بناءا على نتائجك في (b) و(c)، بين بأن $\hat{\theta}_n$ هو مقدر متسق لـ θ.

التمرين الثاني:

لتكن لدينا العينة العشوائية للملاحظات المستقلة في y_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

a) إذا كانت $y_i \sim N(0, \sigma^2)$. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ σ^2 وتوزيعه التقاربي.

b) إذا كانت $y_i \sim N(0, 1)$. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ وتوزيعه التقاربي.

c) بناءا على التوزيع y_i في (b) أعلاه، بين صحة العبارة التالية:

$$E\left[\frac{\partial \log L(\theta, Y)}{\partial \theta}\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2 \log L(\theta, Y)}{\partial \theta^2}\right] = -E\left[\partial^2 \log L(\theta, Y)\right]$$

d) إذا كانت $y_i \sim N(\theta_i, \sigma^2)$. إشتق مقدرات المعقولية العظمى المناسبة لـ $(\sigma^2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$، وتوزيعها التقاربي.

e) إذا كانت $y_i \sim N(\theta_i, \sigma_i^2)$. إشتق مقدرات المعقولية العظمى المناسبة لـ $(\sigma^2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ وتوزيعها التقاربي.

f) قارن مابين مفهومي التقارب بالإحتمال والتقارب بالتوزيع.

التمرين الثالث:

لنعتبر النموذج الخطي التالي:

$$y_i = \theta_1 X_{1i} + u_i$$
$$u_i \sim NI(0, \sigma_u^2)$$
$$\theta = (\theta_1, \sigma_u^2)$$

a) عرف مقدر المربعات الصغرى العادية ومقدر المعقولية العظمى لـ θ.

b) قارن خصائص المقدرين في (a) أعلاه.

c) بين بأن $var(\hat{\theta}_1) = \sigma_u^2 / \sum X_{1i}^2$. وقارنه مع الحد الأدنى لمتراجحة كرامر-رو. حيث أن $\hat{\theta}$ هو مقدر المربعات الصغرى العادية.

d) إذا أضفنا الحد الثابت، θ_0، للنموذج الخطي أعلاه. أوجد مصفوفة المعلومات للمعالم $\theta = (\theta_0, \theta_1, \sigma_u^2)$.

التمرين الرابع:

لتكن لدينا السلسلتين العشوائيتين Z_n، Y_n، $n > 1$.

a) بين بأنه إذا كانت $Y_n \xrightarrow{P} b$، $Z_n \xrightarrow{P} c$، b، c ثابتين فإنه يستلزم ذلك أن: $Y_n - Z_n \xrightarrow{P} b - c$.

b) لتكن الأن y_1 ، Z_1 موجهين عشوائيين طبيعيين. بين بـأن التوفيق الخطـي $A_1y_1 + B_1Z_1$ يكون موجها طبيعيا مستعملا في ذلك الدوال المميزة.

c) بين بأنه إذا كانت y_1 موجها عشوائيا متعددا، فإن دالته المميزة تعطي بالعبارة:

$$\phi_{y_1}(t) = \exp\left[i\mu' t - \frac{1}{2} t' \sum t\right]$$

d) بين أنه إذا كانت y_i عبارة عن موجهات عشوائية موزعة تماثليا وإستقلاليا، كل واحد منها بوسط μ، ومصفوفة تباين هي $\sum$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu) \xrightarrow{D} \eta \sim N(0, \Sigma)$$

حيث أن η هو توزيع طبيعي متعدد.

التمرين الخامس:

ليكن النموذج الخطي العام على الشكل $Y = X\beta + U$ مـع مجموعة القيود الخطيـة $R\beta = r$. حيث R و r هي $m \times k$، $m \times 1$ علـى الترتيب للقيود المناسبة.

a) أوجد مقدر المعقولية العظمـى المقيد $\tilde{\beta}_R$. بين بأنـه مقـدر غير متحيز وأوجد تباينه.

b) ليكـن $\tilde{\beta}_R$ و $\tilde{\lambda}$ مقـدري المعقوليـة العظمـى المقيد ومضاعفـات لاغرانــج علــى الترتيب. وإذا كانت:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_R \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix}\right].$$

أوجد العناصر: A، B، D، c_1، c_2.

c) إشتق مصفوفة المعلومات $I(\beta, \lambda, \sigma_u^2)$.

d) بإستعمال قانون المعكوس المجزء:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F' & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F' & E^{-1} \end{bmatrix}$$

حيث أن: $E = D - B'A^{-1}B, \quad F = A^{-1}B$

إشتق معكوس مصفوفة المعلومات $I^{-1}(\beta, \lambda, \sigma_u^2)$. وقارن مختلف عناصرها مع العناصر A، B، D في الفرع (b) أعلاه.

e) بين بأن متراجحة كرامر-رو للحد الأدنى تحققها مصفوفة المعلومات $I(\beta, \lambda, \sigma_u^2)$.

f) لتكن $\tilde{U}_R$ بواقي المعقولية العظمى المقيدة، $\tilde{U}$ بواقي المعقولية العظمى غير المقيدة. تأكد أن:

$$\tilde{U}'_R \tilde{U}_R - \tilde{U}'\tilde{U} = (R\tilde{\beta} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\tilde{\beta} - r)$$

g) لتكن $\tilde{\sigma}_R^2$ هي مقدر المعقولية العظمى المقيد لـ σ_u^2. تأكد من صحة العبارة:

$$\frac{n\tilde{\sigma}_R^2}{\sigma_u^2} = \frac{\tilde{U}'_R \tilde{U}_R}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{(n+m-k)}$$

h) بين بأن: $\sqrt{n}(\tilde{\beta}_R - \beta) \xrightarrow{D} P\eta \sim N(0, P)$

حيث أن:

$$\eta \sim N(0, Q)$$

$$P = Q^{-1} - Q^{-1}R'\left[RQ^{-1}R'\right]^{-1}RQ^{-1}$$

$$PQP = P$$

$$Q = \lim_{n \to \infty}(n^{-1}X'X)$$

i) من أجل القيود الخطية $R\beta = r$، كون الإختبارات الإحصائية الثلاثة: Wald، LM، LR وأجري مقارنة فيما بينها.

التمرين السادس:

لنعتبر النموذج الخطي: $Y_i = X_{1i}\theta_1 + X_{2i}\theta_2 + u_i$ مع الفرضيات $E(U_i) = 0$ ، $var(U) = \sigma_u^2 I_n$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

a) تأكد من أن مقدر المربعات الصغرى العادية لـ θ المقيدة. لما $\theta_1 = 0$ هو:

$$\hat{\theta}_{1R} = 0$$

$$\hat{\theta}_{2R} = \hat{\theta}_2 + (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\hat{\theta}_1$$

b) إذا أصبح النموذج أعلاه على الشكل: $Y_i = X_i\theta + u_i$. حيث أن المعلمة θ مقيدة بالعبارة $R\beta = r$. ولنفرض أن الزوج (U_i, X_i) مستقل ويحقق $E(U/X) = 0$ ، $var(U/X) = \sigma_u^2$ إستعمل عبارتي المقدر $\tilde{\theta}_F$ وموجه المقدر لمضاعفات لاغرانج $\tilde{\lambda}$ لتبين بأن هذين الأخيرين يتقاربان في العينات الكبيرة إلى كل من θ و 0 على الترتيب.

c) لنعتبر الآن نموذج العينة من الشكل $Y_i \sim N(0, \Sigma)$. حيث أن الموجه $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ غير معروف بينما المصفوفة Σ معروفة. ماهو مقدر المعقولية العظمى غير المقيد لـ θ_1. وإذا كان $\theta_2 = 0$ فماهو مقدر المعقولية لـ θ_1 كذلك وماهو توزيعه في هذه الحال؟

التمرين السابع:

في النموذج الخطي العام:

$$Y = X\beta + U$$

$$E(UU') = \sigma_u^2 I_n$$

a) إذا كانت X عشوائية، لكن $\text{plim}(n^{-1}X'X)$ موجودة كمصفوفة غير شاذة وكذلك لدينا $\text{plim}(n^{-1}X'U) = 0$ بين أن: $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$ حيث $\hat{\beta}$ هو مقدر المربعات الصغرى العادية.

b) إذا كانت كذلك $\text{plim}(n^{-1}U'U) = \sigma_u^2$

بين أن $\hat{\sigma}_u^2 = \hat{U}'\hat{U}/(n-k)$، و$\tilde{\sigma}_u^2 = \hat{U}'\hat{U}/n$ كليهما مقدر متسق لـ σ_u^2.

c) إذا أعدنا كتابة النموذج أعلاه على الشكل

$$Y = X\beta + U = i\beta_1 + X_{*}\beta_{*} + U$$

نستعمل التقدير بواسطة المتغيرات الأدواتية، حيث أن المصفوفة الأدواتية Z هي $n \times k$ ومجزأة مثل $Z = [i \quad Z_{*}]$. بين أن:

$$\hat{b}_{*} = (Z_{*}'M_0X_0)^{-1}Z_{*}'M_0Y$$

d) إذا أصبح لدينا النموذج السلمي التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t; \quad t = 1,2,\dots,n$$

$$E(X_t u_t) \neq 0$$

بحيث أن التقدير بواسطة المربعات الصغرى العادية، أصبح غير متسق. وإذا كان:

$$\text{plim}\left[n^{-1}(X_t - \bar{X})(u_t - \bar{u})\right] = E(X_t u_t)$$

$$\text{plim}\left[n^{-1}(X_t - \bar{X})^2\right] = \text{var}(X_t)$$

بين أن إتجاه عدم الإتساق (أي إشارة $(\text{plim}(\hat{\beta} - \beta)$) يعتمد على إشارة $\text{cov}(X_t, u_t)$.

e) لتكن X_t في العلاقة (d) عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية الموزعة تماثليا وإستقلاليا مع:

$$X_t \sim \text{IID}(\mu, \sigma_X^2)$$

بإستعمال الشروط الضرورية للتقارب الإحتمالي (بالإحتمال)، بين أن:

$$p\lim(\overline{X}_m) = p\lim(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \mu$$

f) إشرح كيف أن مقدر المعقولية العظمى لـ σ_u^2 في النموذج الخطي العام أعلاه، قادر على تحقيق الحد الأدنى لمتراجحة كرامر-رو. بين دور مصفوفة المعلومات في التقدير بواسطة المعقولية العظمى.

g) في عينة من 21 ملاحظة مناسبة لنموذج تحديد الدخل:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

حصلنا على النتائج:

$$\sum(C_t - \overline{C})(Y_t - \overline{Y}) = 9 \quad \sum(Y_t - \overline{Y})^2 = 12$$

$$\sum(I_t - \overline{I})^2 = 1 \quad \sum(C_t - \overline{C})(I_t - \overline{I}) = 2$$

$$\sum(Y_t - \overline{Y})(I_t - \overline{I}) = 3,$$

قدر β بواسطة المربعات الصغرى، ثم إستعمل I_t كمتغير أداتي. علق على نتائجك بناءا على العلاقة (d) أعلاه.

ملحق الجداول الإحصائية

جدول 1: مساحات التوزيع الطبيعي المعياري

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0487	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3213	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3910	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4829	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

جدول 2: توزيع Student's t

P / ν	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

جدول 3: توزيع Chi2

D F	p=0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.1488	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	34.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314

جدول 3 تابع : توزيع Chi2

DF	p=0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

جدول 4: توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5%	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	1%	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	5%	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41
	1%	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.41	99.42
3	5%	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74
	1%	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	5%	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91
	1%	21.30	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.47	14.37
5	5%	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.75	4.70	4.98
	1%	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96	9.89
6	5%	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	1%	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	5%	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57
	1%	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47
8	5%	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28
	1%	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67
9	5%	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07
	1%	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	5%	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91
	1%	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71
11	5%	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.96	2.82	2.79
	1%	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	5%	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69
	1%	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	5%	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60
	1%	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	5%	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53
	1%	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	5%	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48
	1%	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	5%	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42
	1%	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55
17	5%	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38
	1%	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45
18	5%	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	1%	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37
19	5%	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31
	1%	8.18	3.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	5%	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28
	1%	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23
21	5%	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25
	1%	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17
22	5%	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.32
	1%	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
23	5%	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20
	1%	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07
24	5%	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18
	1%	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03
25	5%	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16
	1%	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99
26	5%	4.22	3.37	2.89	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	1%	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	5%	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13
	1%	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93
28	5%	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	3.24	2.19	2.15	2.12
	1%	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90
29	5%	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10
	1%	7.60	5.52	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87
30	5%	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	1%	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84
32	5%	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07
	1%	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80
34	5%	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05
	1%	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76
36	5%	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03
	1%	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72
38	5%	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02
	1%	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69
40	5%	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00
	1%	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73	2.66
42	5%	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99
	1%	7.27	5.15	4.29	3.80	3.49	3.26	3.10	2.96	2.86	2.77	2.70	2.64
44	5%	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98
	1%	7.24	5.12	4.26	3.78	3.46	3.24	3.07	2.94	2.84	2.75	2.68	2.62
46	5%	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97
	1%	7.21	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.05	2.92	2.82	2.73	2.66	2.60
48	5%	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96
	1%	7.19	5.08	4.22	3.74	3.42	3.20	3.04	2.90	2.80	2.71	2.64	2.58

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	5%	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95
	1%	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	3.02	2.88	2.78	2.70	2.62	2.56
55	5%	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93
	1%	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53
60	5%	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	1%	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
65	5%	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.94	1.90
	1%	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.79	2.70	2.62	2.54	2.47
70	5%	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.32	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89
	1%	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.77	2.67	2.59	2.51	2.45
80	5%	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88
	1%	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.41
100	5%	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85
	1%	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.43	2.36
125	5%	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83
	1%	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40	2.33
150	5%	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82
	1%	6.81	4.75	3.91	3.44	3.13	2.92	2.76	2.62	2.53	2.44	2.37	2.30
200	5%	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80
	1%	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.28
400	5%	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78
	1%	6.70	4.66	3.83	3.36	3.06	2.85	2.69	2.55	2.49	2.37	2.29	2.23
1000	5%	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76
	1%	6.66	4.62	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.26	2.20
∞	5%	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	1%	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.18

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	5%	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	1%	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	5%	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	1%	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.49	99.50	99.50
3	5%	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	1%	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.30	26.27	26.23	26.18	26.14	26.12
4	5%	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	1%	14.24	14.15	14.02	13.93	13.83	13.74	13.69	13.61	13.57	13.52	13.48	13.46
5	5%	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	1%	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.07	9.04	9.02
6	5%	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	1%	7.60	7.52	7.39	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.94	6.90	6.88
7	5%	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	1%	6.35	6.27	6.15	6.07	5.98	5.90	5.85	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65
8	5%	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
	1%	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.11	5.06	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
9	5%	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	1%	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
10	5%	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	1%	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
11	5%	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	1%	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
12	5%	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	1%	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.61	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
13	5%	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	1%	3.85	3.78	3.67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
		درجات حرية البسط											
14	5%	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
	1%	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00
15	5%	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07
	1%	3.56	3.48	3.36	2.39	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87
16	5%	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
	1%	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75
17	5%	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
	1%	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65
18	5%	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
	1%	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57
19	5%	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88
	1%	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49
20	5%	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84
	1%	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42
21	5%	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81
	1%	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.42	2.38	2.36
22	5%	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78
	1%	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31
23	5%	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
	1%	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
24	5%	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73
	1%	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21
25	5%	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
	1%	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17
26	5%	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.96
	1%	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13

جدول 5 تابع : التوزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط: 14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
27	5%	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	1%	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
28	5%	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	1%	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.13	2.09	2.06
29	5%	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	1%	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
30	5%	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	1%	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01
32	5%	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	1%	2.70	2.62	2.51	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	5%	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	1%	2.66	2.58	2.47	2.38	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	5%	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	1%	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.17	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
38	5%	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	1%	2.59	2.51	2.30	2.32	2.22	2.14	2.08	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84
40	5%	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	1%	2.56	2.49	2.37	2.29	2.20	2.11	2.05	1.97	1.94	1.88	1.84	1.81
42	5%	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	1%	2.54	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.02	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78
44	5%	1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48
	1%	2.52	2.44	2.32	2.24	2.15	2.06	2.00	1.92	1.88	1.82	1.78	1.75
46	5%	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	1%	2.50	2.42	2.40	2.22	2.13	2.04	1.98	1.90	1.86	1.80	1.76	1.72
48	5%	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	1%	2.48	2.40	2.28	2.20	2.11	2.02	1.96	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70

جدول 4 تابع : توزيع F

درجات حرية المقام		درجات حرية البسط 14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
50	5%	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
	1%	2.46	2.39	2.26	2.18	2.10	2.00	1.94	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68
55	5%	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41
	1%	2.43	2.35	2.23	2.15	2.06	1.96	1.90	1.82	1.78	1.71	1.66	1.64
60	5%	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
	1%	2.40	2.32	2.20	2.12	2.03	1.93	1.87	1.79	1.74	1.68	1.63	1.60
65	5%	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
	1%	2.30	2.37	2.18	2.09	2.00	1.90	1.84	1.76	1.71	1.64	1.60	1.56
70	5%	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
	1%	2.35	2.28	2.15	2.07	1.98	1.88	1.82	1.74	1.69	1.63	1.56	1.53
80	5%	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
	1%	2.32	2.24	2.11	2.03	1.94	1.84	1.78	1.70	1.65	1.57	1.52	1.49
100	5%	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28
	1%	2.26	2.19	2.06	1.98	1.89	1.79	1.73	1.64	1.59	1.51	1.46	1.43
125	5%	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25
	1%	2.23	2.15	2.03	1.94	1.85	1.75	1.68	1.59	1.54	1.46	1.40	1.37
150	5%	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22
	1%	2.20	2.12	2.00	1.91	1.83	1.72	1.66	1.56	1.51	1.43	1.37	1.33
200	5%	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
	1%	1.17	2.09	1.97	1.88	1.79	1.69	1.62	1.53	1.48	1.39	1.33	1.28
400	5%	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13
	1%	2.12	2.04	1.92	1.84	1.74	1.64	1.57	1.47	1.42	1.32	1.24	1.19
1000	5%	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
	1%	2.09	2.01	1.89	1.81	1.71	1.61	1.54	1.44	1.38	1.28	1.19	1.11
∞	5%	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
	1%	2.07	1.99	1.87	1.79	1.69	1.59	1.52	1.41	1.36	1.25	1.15	1.00

الجدول 5: إحصاءة داربين-واتسون بمستوى معنوية 1 %

	k'=1		k'=2		k'=3		k'=4		k'=5	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.390	1.142	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.435	1.036	0.294	1.676	—	—	—	—	—	---
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	---	---	—	—
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	—	—
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	2.286	2.030	0.193	2.453
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.464	0.488	1.704	0.391	1.967
16	0.844	1.086	0.737	1.252	0.633	1.446	0.532	1.663	0.437	1.900
17	0.874	1.102	0.772	1.255	0.672	1.432	0.574	1.630	0.480	1.847
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.613	1.604	0.522	1.803
19	0.928	1.132	0.835	1.265	0.742	1.415	0.650	1.584	0.561	1.767
20	0.952	1.147	0.863	1.271	0.773	1.411	0.685	1.567	0.598	1.737
21	0.975	1.161	0.890	1.277	0.803	1.408	0.718	1.554	0.633	1.712
22	0.997	1.174	0.914	1.284	0.831	1.407	0.748	1.543	0.667	1.691
23	1.018	1.187	0.938	1.291	0.858	1.407	9.777	1.534	0.698	1.673
24	1.037	1.199	0.960	1.298	0.882	1.407	0.805	1.528	0.728	1.658
25	1.055	1.211	0.981	1.305	0.906	1.409	0.831	1.523	0.756	1.645
26	1.072	1.222	1.001	1.312	0.928	1.411	0.855	1.518	0.783	1.635
27	1.089	1.233	1.019	1.319	0.949	1.413	0.878	1.515	0.808	1.626
28	1.104	1.244	1.037	1.325	0.696	1.415	0.900	1.513	0.832	1.618
29	1.119	1.254	1.054	1.332	0.988	1.418	0.921	1.512	0.855	1.611
30	1.133	1.263	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.511	0.877	1.606
31	1.147	1.273	1.085	1.345	1.023	1.425	0.960	1.510	0.897	1.601
32	1.160	1.282	1.100	1.352	1.040	1.428	0.979	1.510	0.917	1.597
33	1.172	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.996	1.510	0.936	1.594
34	1.184	1.299	1.128	1.364	1.070	1.435	1.012	1.511	0.954	1.591
35	1.195	1.307	1.140	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589
36	1.206	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.988	1.588
37	1.217	1.323	1.165	1.382	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.586
38	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.585
39	1.237	1.337	1.187	1.393	1.137	1.453	1.085	1.517	1.034	1.584
40	1.246	1.344	1.198	1.398	1.148	1.457	1.098	1.518	1.048	1.584
45	1.288	1.376	1.245	1.423	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.584
50	1.324	1.403	1.285	1.446	1.245	1.491	1.205	1.538	1.164	1.587
55	1.356	1.427	1.320	1.466	1.284	1.506	1.247	1.548	1.209	1.592
60	1.383	1.449	1.350	1.484	1.317	1.520	1.283	1.558	1.249	1.598
65	1.407	1.468	1.377	1.500	1.346	1.534	1.315	1.568	1.283	1.604
70	1.429	1.485	1.400	1.515	1.372	1.546	1.343	1.578	1.313	1.611
75	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.587	1.340	1.617
80	1.466	1.515	1.441	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624
85	1.482	1.528	1.458	1.553	1.435	1.578	1.411	1.603	1.386	1.630
90	1.496	1.540	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636
95	1.510	1.552	1.489	1.573	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.642
100	1.522	1.562	1.503	1.583	1.482	1.604	1.462	1.625	1.441	1.647
150	1.611	1.637	1.598	1.651	1.584	1.665	1.571	1.679	1.557	1.693
200	1.664	1.684	1.653	1.693	1.643	1.704	1.633	1.715	1.623	1.725

الجدول 5 تابع : إحصاءة داربين–واتسون بمستوى معنوية 1 %

n	k'=6 dL	k'=6 dU	k'=7 dL	k'=7 dU	k'=8 dL	k'=8 dU	k'=9 dL	k'=9 dU	k'=10 dL	k'=10 dU
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.124	2.892	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.164	2.665	0.105	0.053	—	—	—	—	—	—
13	0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182	—	—	—	—
14	0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.287	—	—
15	0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
16	0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
17	0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
18	0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.216	2.697	0.160	2.925
19	0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
20	0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.714
21	0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.434	0.268	2.625
22	0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
23	0.620	1.821	0.545	1.977	0.473	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
24	0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	0.439	2.255	0.375	2.417
25	0.682	1.766	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
26	0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
27	0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
28	0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
29	0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
30	0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160
31	0.834	1.698	0.772	1.800	0.710	1.906	0.649	2.017	0.589	2.131
32	0.856	1.690	0.794	1.788	0.734	1.889	0.674	1.995	0.615	2.104
33	0.876	1.683	0.816	1.776	0.757	1.874	0.698	1.975	0.641	2.080
34	0.896	1.677	0.837	1.766	0.779	1.860	0.722	1.957	0.665	2.057
35	0.914	1.671	0.857	1.757	0.800	1.847	0.744	1.940	0.689	2.037
36	0.932	1.666	0.877	1.749	0.821	1.836	0.766	1.925	0.711	2.018
37	0.950	1.662	0.895	1.742	0.841	1.825	0.787	1.911	0.733	2.001
38	0.966	1.658	0.913	1.735	0.860	1.816	0.807	1.899	0.754	1.985
39	0.982	1.655	0.930	1.729	0.878	1.807	0.826	1.887	0.774	1.970
40	0.997	1.652	0.946	1.724	0.895	1.799	0.844	1.876	0.789	1.956
45	1.065	1.643	1.019	1.704	0.974	1.768	0.927	1.834	0.881	1.902
50	1.123	1.639	1.081	1.692	1.039	1.748	0.997	1.805	0.955	1.864
55	1.172	1.638	1.134	1.685	1.095	1.734	1.057	1.785	1.018	1.837
60	1.214	1.639	1.179	1.682	1.144	1.726	1.108	1.771	1.072	1.817
65	1.251	1.642	1.218	1.680	1.186	1.720	1.153	1.761	1.120	1.802
70	1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
75	1.313	1.646	1.284	1.682	1.256	1.716	1.227	1.746	1.199	1.785
80	1.338	1.653	1.312	1.683	1.285	1.714	1.259	1.745	1.232	1.777
85	1.362	1.657	1.337	1.685	1.312	1.714	1.287	1.743	1.262	1.773
90	1.383	1.661	1.360	1.687	1.336	1.714	1.312	1.741	1.288	1.769
95	1.403	1.666	1.381	1.690	1.358	1.715	1.336	1.741	1.313	1.767
100	1.421	1.670	1.400	1.693	1.378	1.717	1.357	1.741	1.335	1.765
150	1.543	1.708	1.530	1.722	1.515	1.737	1.501	1.752	1.486	1.767
200	1.413	1.735	1.603	1.746	1.592	1.757	1.582	1.768	1.571	1.779

الجدول 6: إحصاءة داربين–واتسون بمستوى معنوية 5 %

n	k'=1		k'=2		k'=3		k'=4		k'=5	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.610	1.400	—	—	---	---	---	---	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	---	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820

Econometrics", Second edition, Harpper International Edition, London 1976.

23- KMENTA.J. "Elements of Econometrics", Collier-Mac Millan Publishers, London 1971.

24- KMENTA.J. and RAMSEY.J.B. "Evaluation of Econometric Models" Academic Press, London, 1980.

25- KOUTSOYIANNIS.A. "Theory of Econometrics", Mc Millan Press. LTD, London 1983.

26- LUCAS.R. and SARGENT.T. "Rational Expectations and Econometric Practice", George Allen, London 1981.

27- LÜTKERPHOL.H. "Introduction to Multiple Time Series Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1991.

28- MADDALA.G.S. "Econometrics", Mc Craw-Hill New York 1971.

29- MADDALA.G.S "Introduction to Econometrics", Mac Millan Publishing Company, New York, 1988.

30- MALINVAUD.E "Statistical Methods of Econometrics" North-Holland Publishing Company, 1970.

31- PINDYCK.R.S and RUBINFELD.D.L. "Econometric Models and Economic Forcasts", Mc-Craw-Hill Interenational Book Company, London 1981.

32- POLLOCK.D.S.G. "The Algebra of Econometrics", John Weiley and Sons. LTD, 1979.

الجدول 6 تابع : إحصاءة داربين-واتسون بمستوى معنوية 5 %

n	k'=6		k'=7		k'=8		k'=9		k'=10	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.203	3.005	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—
13	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—
14	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—
15	0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	0.502	2.388	0.395	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
19	0.649	2.206	0.459	2.396	0.456	2.589	0.396	2.783	0.290	2.974
20	0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
22	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
23	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.318	0.621	2.419	0.544	2.560
26	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
29	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
30	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
34	1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
38	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.945	2.149
45	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.002	1.038	2.088
50	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.989	1.110	2.044
55	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
200	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

جدول 7 : إحصاءة Wallis بمستوى معنوية 5 % لمحدرات غير محتوية على متغيرات وهمية وموسمية k=k'+1

	k'=1		k'=2		k'=3		k'=4		k'=5	
n	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U
16	0.774	0.982	0.662	1.109	0.549	1.275	0.435	1.381	0.350	1.532
20	0.924	1.102	0.827	1.203	0.728	1.327	0.626	1.428	0.544	1.556
24	1.036	1.189	0.953	1.273	0.867	1.371	0.779	1.459	0.702	1.565
28	1.123	1.257	1.050	1.328	0.975	1.410	0.898	1.487	0.828	1.576
32	1.192	1.311	1.127	1.373	1.061	1.443	0.993	1.511	0.929	1.587
36	1.248	1.355	1.191	1.410	1.131	1.471	1.070	1.532	1.013	1.598
40	1.295	1.392	1/243	1.442	1.190	1.496	1.135	1.550	1.082	1.609
44	1.335	1.423	1.288	1.469	1.239	1.518	1.189	1.567	1.141	1.620
48	1.369	1.451	1.326	1.493	1.281	1.537	1.236	1.582	1.191	1.630
52	1.399	1.475	1.359	1.513	1.318	1.554	1.276	1.595	1.235	1.639
56	1.426	1.496	1.389	1.532	1.351	1.569	1.312	1.608	1.273	1.648
60	1.449	1.515	1.415	1.548	1.379	1.583	1.343	1.619	1.307	1.656
64	1.470	1.532	1.438	1.563	1.405	1.596	1.371	1.629	1.337	1.664
68	1.489	1.548	1.459	1.577	1.427	1.608	1.396	1.639	1.364	1.671
72	1.507	1.562	1.478	1.589	1.448	1.618	1.418	1.648	1.388	1.678
76	1.522	1.574	1.495	1.601	1.467	1.628	1.439	1.656	1.411	1.685
80	1.537	1.586	1.511	1.611	1.484	1.637	1.457	1.663	1.431	1.691
84	1.550	1.597	1.525	1.621	1.500	1.646	1.475	1.671	1.449	1.696
88	1.562	1.607	1.539	1.630	1.515	1.654	1.490	1.677	1.466	1.702
92	1.574	1.617	1.551	1.639	1.528	1.661	1.505	1.684	1.482	1.707
96	1.584	1.626	1.563	1.647	1.541	1.668	1.519	1.690	1.496	1.712
100	1.594	1.634	1.573	1.654	1.552	1.674	1.531	1.695	1.510	1.717

جدول 8 : إحصاءة Wallis بمستوى معنوية 5 % لمحدرات محتوية على متغيرات وهمية وموسمية $k=k''+4$

	k''=1		k''=2		k''=3		k''=4		k''=5	
n	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U	d4,L	d4,U
16	1.156	1.381	1.031	1.532	0.902	1.776	0.777	2.191	0.693	2.238
20	1.228	1.428	1.123	1.556	1.013	1.726	0.899	1.954	0.806	2.042
24	1.287	1.459	1.199	1.565	1.107	1.694	1.011	1.856	0.928	1.949
28	1.337	1.487	1.261	1.576	1.181	1.679	1.099	1.803	1.025	1.889
32	1.379	1.511	1.312	1.587	1.243	1.673	1.171	1.773	1.104	1.850
36	1.414	1.532	1.355	1.598	1.293	1.672	1.230	1.755	1.170	1.824
40	1.445	1.550	1.391	1.609	1.336	1.674	1.279	1.745	1.225	1.807
44	1.471	1.567	1.422	1.620	1.373	1.677	1.321	1.739	1.272	1.795
48	1.494	1.582	1.450	1.630	1.404	1.681	1.357	1.737	1.312	1.788
52	1.514	1.595	1.474	1.639	1.432	1.686	1.389	1.736	1.347	1.782
56	1.533	1.608	1.495	1.648	1.456	1.691	1.416	1.736	1.377	1.779
60	1.549	1.619	1.514	1.656	1.478	1.696	1.441	1.737	1.404	1.777
64	1.564	1.629	1.531	1.664	1.497	1.700	1.463	1.739	1.429	1.776
68	1.577	1.639	1.546	1.671	1.515	1.705	1.482	1.741	1.450	1.775
72	1.590	1.648	1.560	1.678	1.531	1.710	1.500	1.743	1.470	1.776
76	1.601	1.656	1.573	1.685	1.545	1.714	1.517	1.746	1.488	1.776
80	1.611	1.663	1.585	1.691	1.559	1.719	1.531	1.748	1.504	1.777
84	1.621	1.671	1.596	1.696	1.571	1.723	1.545	1.751	1.519	1.778
88	1.630	1.677	1.607	1.702	1.582	1.727	1.558	1.753	1.533	1.779
92	1.639	1.684	1.616	1.707	1.593	1.731	1.570	1.756	1.546	1.781
96	1.647	1.690	1.625	1.712	1.603	1.735	1.580	1.759	1.558	1.782
100	1.654	1.695	1.633	1.717	1.612	1.739	1.591	1.761	1.569	1.784

قائمة المراجع

1- BRIDGE . J.L "Applied Econometrics", North - Holland publishing Company, Amsterdam 1971.

2- BRILLET.J.L "Modelisation Econometrique": Principes et Techniques, Economica, Paris 1994.

3- CHALLEN .D.W and HAGGER.A.J "Macroeconometric Systems: Construction, Validation and Applications" Mac Millan Press L.T.D, London 1983.

4- CHOW .G.C "Econometric Analysis by Control Methods" John Wiley and Sons, New York 1981.

5- CHOW .G.C "Econometrics", Mc Graw-Hill, London, 1983.

6- COMON.M.S "Basis Econometrics" , John Weilley, London 1971.

7- DAGNELIE.P "Theorie et Methodes statistiques", Volume1,2. Les presses Agronomiques de Gembloux (A.S.B.L) Belgique 1984.

8- DAVID .G.M "Applications of Econometrics", prentice Hall International INC, London 1981.

9- DEATON. A. and MUELBAUER.J. "Economics and Consumer Behavior", Cambridge University Press, 1980.

10- DHRYMES.P.J "Introdctory Econometrics", Springer Verlay, New York, 1971 and 1978.

11- DORNBUSH.R and FISHER.S "Macroeconomics", MAC Graw-Hill Company, London 1994.

12- FARRAR.D.E and GLAUBER.R.R. "Multicollinearity in Regression Analysis" Revue of Economics and Statistics, Vol 49, 1967.

13- GODFREY.L.G "Misspecification Tests in Econometrics" Cambridge University Press, 1990.

14- GOLDBERGER.A.S "Econometric Theory" John Weilley and Sons, Inc, New York, 1964.

15- GOURIEROUX.C et MONFORT.A "Statistique et Modeles Econometriques", Volume 1,2, Economica, Paris 1989.

16- GRANGER.C.W.J and NEWBOLD.P "Forcasting Economic Time Series" Academic Press, Inc, London 1986.

17- HARVEY.A.C "The Econometric Analysisi of Time Series", Philip Alan, Oxford 1981.

18- HOUTHAKKER.H and TAYLOR.L "Consumer Demand in the USA 1929-1970", Analysis and Projections Harvard Univeristy Press, USA, 1970.

19- INTRILIGATOR.M.D "Econometric Models and Applications" Mc-Craw-Hill Company, London 1978.

20- JOHNSTON.J. "Econometric Methods", Mc-Craw-Hill International Book Company, London 1984.

21- JUDGE.G.G., GRIFFITHS.W.E, Hill.R.C and LEE.T.C "The Theory and Practice of Econometrics", Wiley, New York, 1980.

22- KELEJIAN.H.H. and OATES.WE. "Introduction to

33- SCHMIDT.P. "Econometrics" Marcel Delaken, New York, 1976.

34- SPANOS.A. "Statistical Foundations of Econometric Modelling", Cambridge University Press, 1986.

35- STEWART.J. "Econometrics", Cambridge University Press, 1991.

36- STEWART.J. and WALLIS.K.F. "Introductory Econometrics" Basil Black-Well, Oxford 1981.

37- STIGLER.J.M. "Gauss and the Invention of Least Squares", The Annals of statisctics, Vol 9, N°3, 1981.

38- THEIL.H. "Principles of Econometrics", John Wiley and Sons, New York, 1971.

39- WALLIS.K.F. "Topics in Applied Econometrics" Basil Black-Well, Oxford, 1979.

40- WONNACOTT.T. and WONNACOTT.R. "Introductory statistics", John Willey and Sons, London 1977 and 1979.

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية . بن عكنون
الجزائر

هذا الكتاب، في جزئيه الأول والثاني، موجه لطلبة معاهد الاقتصاد، الاحصاء وميادين الاقتصاد التطبيقي. حيث يركز على بعض المشاكل التي تواجه باحث القياس الاقتصادي أثناء تقدير واختبار التصرفات الاقتصادية للافراد، المؤسسات ومتخذي القرارات الاقتصادية على المستويين الجزئي والكلي.

تم تقسيم هذا الكتاب الى جزئين. يعتمد الجزء الأول على المبادئ والطرق الاحصائية الممكن استعمالها في دراسة وتحليل الظواهر، العلاقات والتصرفات الاقتصادية، مثل دوال الاستهلاك، الانتاج وغيرها. وذلك عن طريق فهم ودراسة التقنيات الأحصائية اللازمة لاختبار مدى صحتها ومطابقتها للنظريات الاقتصادية ميدانيا. أما الجزء الثاني فيركز على المشاكل التي تواجه الدارس عند اختياره لطرق نمذجة هذه التصرفات الاقتصادية في شكل نموذج قياسي اقتصادي يشرح مختلف العلاقات الاقتصادية فيما بينها. ومن ثم استعمال هذا الأخير في التحليل، اتخاذ القرارات والسياسات الاقتصادية المناسبة عن طريق التنبؤ والمحاكاة.

www.opu-dz.com



9789961003503

رقم النشر: 4364
455 دج